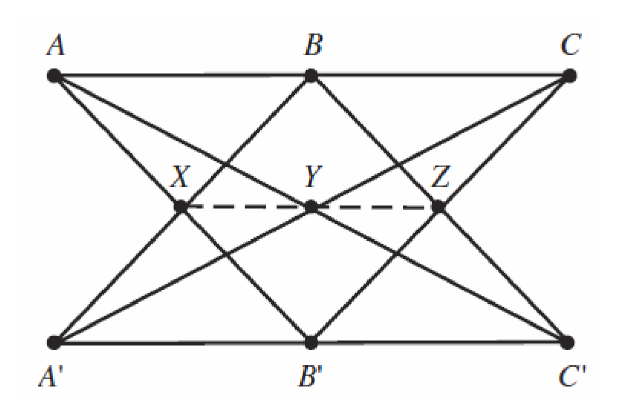
GEOMETRIA PROYECTIVA



Gerard Romo Garrido



Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates Cool·lección** son recopilaciones de materiales matemáticos, redactados, ordenados y sistematizados por **Gerard Romo**, con el objetivo de que puedan ser útiles para cualquier estudioso de las matemáticas.

"**Always Under Construction**": Debido a lo ambicioso del proyecto, estos documentos se van ampliando, corrigiendo y completando incesantemente a lo largo de los años.

Se agradecerá cualquier observación, comentario, rectificación o colaboración a
toomates@gmail.com

Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición.

Actualmente Toomates Cool·lección consta de los siguientes documentos:

Geometría Axiomática	pdf	doc1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
Geometría Proyectiva Teoría	pdf	doc1 2 3 4 5 6 7
Problemas de Matemáticas vol. 1	pdf	doc
Problemas de Matemáticas vol. 2	pdf	doc
Cangur Integral (en catalán)	pdf	doc
Matemáticas para el bachillerato (en catalán):		
Àlgebra Lineal Batxillerat	pdf	doc
Geometria Lineal Batxillerat	pdf	doc
Càlcul Infinitesimal Batxillerat	pdf	doc
Programació Lineal Batxillerat	pdf	doc
En Preparación:		
Geometría Hiperbólica	pdf	doc1 2 3
Fundamentos de las matemáticas	pdf	doc1 2 3
Geometría Proyectiva Práctica	pdf	doc
Álgebra Lineal Método Jordan	pdf	doc
Geometría Afín	pdf	doc

Versión de este documento: 02/11/2017

www.toomates.net

Índice.

1 La recta proyectiva real.

1.1 Construcción

1.1.1 Definición. La recta proyectiva $P_1(IR)$.

Definimos la recta proyectiva real $P_1(IR)$ como el conjunto IR^2 bajo la siguiente relación de equivalencia:

$$(a,b) \cong (c,d) \Leftrightarrow \exists \lambda \in IR - \{0\} \mid (a,b) = \lambda(c,d)$$

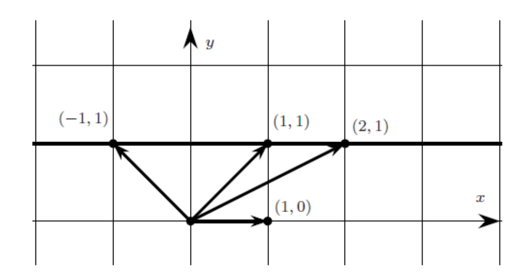
$$P_1(IR) = \frac{IR^2 - \{(0,0)\}}{IR - \{0\}}$$

1.2 La recta real en el contexto proyectivo.

1.2.1 Definición. La inmersión canónica.

Todo número real se puede considerar dentro de $P_1(IR)$ bajo la inmersión

$$i : IR \to P_1(IR)$$
$$x \mapsto i(x) = [(x,1)]$$



1.2.2 Definición. Punto del infinito.

Bajo la inmersión $i(x)$ definida en el apartado anterior, todo punto de $P_1(IR)$ proviene de un número $x \in IR$ exceptuando al punto $[(1,0)]$. A este punto le denominamos "punto del infinito" de la recta proyectiva.

1.3 Homografías.

1.3.1 Proposición. Cambio de variable.
Dados $a,b,c,d \in IR$, son equivalentes:
a) $(\alpha,\beta) \mapsto (a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta)$ es una biyección.
b) $(\alpha,\beta) \mapsto (a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta)$ está bien definido, es decir, no existe ningún $(\alpha,\beta) \in P_1(IR)$ tal que $(a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta) = (0,0)$.
c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Llamaremos **cambio de variable** en $P_1(IR)$ a una aplicación

$$\psi : P_1(IR) \to P_1(IR)$$
$$(\alpha,\beta) \mapsto (a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta)$$

Verificando cualquiera de las condiciones equivalentes anteriores.

Un cambio de variable se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Demostración.
$a) \Rightarrow b)$ evidente.
$b) \Rightarrow c)$ Si el determinante fuera cero, los dos vectores columna serían dependientes, es decir, existirían $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, tales que $(0,0) = \alpha(a,c) + \beta(b,d) = (\alpha a + \beta b, \alpha c + \beta d)$, contradiciendo la hipótesis de b).
$c) \Rightarrow a)$ La función del apartado a) se puede escribir en forma matricial como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ con matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertible, luego $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1.3.2 Proposición.
Dados tres puntos diferentes $A,B,C \in P_1(IR)$, existirá un único cambio de variable $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ tal que $(1,0) \mapsto A$, $(0,1) \mapsto B$ y $(1,1) \mapsto C$.

Demostración.
Sean $A = (a_0, a_1)$, $B = (b_0, b_1)$ y $C = (c_0, c_1)$.
Los puntos A y B son distintos, luego son linealmente independientes y forman una base. Por lo tanto $(c_0, c_1) = \alpha(a_0, a_1) + \beta(b_0, b_1)$ para ciertos $\alpha, \beta \in IR$. Puesto que C es distinto de A y de B, se tiene que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$.
Luego tomando la matriz $M = \begin{pmatrix} \alpha a_0 & \beta b_0 \\ \alpha a_1 & \beta b_1 \end{pmatrix}$ cumple $Det\, M = \alpha \beta \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ y

$$\begin{pmatrix} \alpha a_0 & \beta b_0 \\ \alpha a_1 & \beta b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \approx A, \quad \begin{pmatrix} \alpha a_0 & \beta b_0 \\ \alpha a_1 & \beta b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \approx B$$

y $\begin{pmatrix} \alpha a_0 & \beta b_0 \\ \alpha a_1 & \beta b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = C$.

1.3.3 Corolario. Abscisa de un punto.
Dados tres puntos diferentes $A, B, C \in P_1(IR)$, acabamos de ver que existirá un único cambio de variable $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ tal que $(1,0) \mapsto A$, $(0,1) \mapsto B$ y $(1,1) \mapsto C$. Luego cualquier punto $D \in P_1(IR)$ será $D = f(\rho_0, \rho_1)$, y además, si $D \neq A$, $\rho_1 \neq 0$ y por tanto $D = f\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}, 1\right)$ para un único $\frac{\rho_0}{\rho_1} \in IR$. A este número le llamaremos **abscisa** de D por la referencia (A, B, C).

1.3.4 Definición. Homografía de $P_1(IR)$.
Una homografía de $P_1(IR)$ es una función $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ de la forma $[v] \mapsto [Mv]$ para cierta matriz M invertible 2x2.

Esta construcción está bien hecha puesto que
$$[v] = [w] \Rightarrow v = \lambda w \Rightarrow f([w]) = [Mw] = [\lambda M w] = [M \lambda w] = [Mv] = f([v])$$

1.3.5 Proposición. Teorema fundamental.
Si una homografía $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ deja fijos tres puntos distintos $A, B, C \in P_1(IR)$ entonces es la identidad.

Demostración.

1.3.6 Proposición. Teorema fundamental.
Dados tres puntos diferentes $A, B, C \in P_1(IR)$ y otros tres puntos diferentes $A', B', C' \in P_1(IR)$, existirá una única homografía tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ y $f(C) = C'$.

Demostración.
Por 1.2.4 existirá un cambio de variable $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ tal que $(1,0) \mapsto A$, $(0,1) \mapsto B$ y $(1,1) \mapsto C$.
Y también un cambio de variable $g : P_1(IR) \to P_1(IR)$ tal que $(1,0) \mapsto A'$, $(0,1) \mapsto B'$ y $(1,1) \mapsto C'$.
Basta tomar la aplicación $g \circ f^{-1}$.

1.3.7 Definición. Grupo.
Un grupo es un conjunto G, junto con una operación binaria
$$G \times G \to G$$
$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$
Que cumple las siguientes propiedades:
Axioma G1: Para todo $a, b, c \in G$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (propiedad asociativa)
Axioma G2: Existe un elemento $1 \in G$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in G$.
Axioma G3: Para cada $a \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

El elemento 1 se llama **identidad** o unidad. El elemento $a^{-1} \in G$ se llama el **inverso** de a. El grupo queda denotado por $(G,\cdot,0)$.
Un grupo no necesariamente es conmutativo. Diremos que un grupo es **conmutativo** o **abeliano** si además se cumple:
Axioma G4: Para todo $a,b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a$.

1.3.8 Proposición.
El conjunto de biyecciones de un conjunto en sí mismo, con la composición de funciones $f \circ g$, tiene estructura de grupo no conmutativo.

1.3.9 Definición. Subgrupo.
Un subgrupo de un grupo G es un subconjunto $G' \subset G$ tal que si $a,b \in G' \Rightarrow a \cdot b \in G'$ y $a \in G' \Rightarrow a^{-1} \in G'$.
En particular, $1 \in G'$, pues para cualquier $a \in G' \Rightarrow a^{-1} \in G' \Rightarrow 1 = a \cdot a^{-1} \in G'$.

1.3.10 Proposición.
El conjunto de homografías de $P_1(IR)$ es un subgrupo del grupo de biyecciones.

Demostración.

1.3.11 Definición. Cuerpo. Anillo de división.
Un cuerpo es un grupo abeliano $(F,+,0)$, junto con una operación "multiplicación" $a \cdot b$ cumpliendo las condiciones siguientes:

Axioma C1: $a \cdot b = b \cdot a$
Axioma C2: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Axioma C3: Existe un elemento $1 \in F$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo $a \in F$.
Axioma C4: Para cada $a \in G$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
Axioma C5: $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Un **anillo de división** es un cuerpo cuyo producto $a \cdot b$ no es necesariamente conmutativo, es decir, no se cumple necesariamente el axioma C1.
El conjunto de elementos $a \neq 0$ forman un grupo por la multiplicación.

1.3.12 Definición. Punto doble.
Un punto doble de una homografía $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ es aquel que es homólogo de sí mismo: $f(P) = P$.

1.3.13 Proposición. Clasificación de las proyectividades en función de los puntos dobles.
Una homografía $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ con tres puntos fijos sólo puede ser la identidad (1.3.4). Diremos que f es **hiperbólica** si tiene sólo dos puntos fijos diferentes, que es **parabólica** si tiene un único punto fijo, y finalmente, diremos que es **elíptica** si no tiene ningún punto fijo.

1.3.14 Teorema. Clasificación de las homografías de la recta proyectiva.

Si K es algebraicamente cerrado: Suponiendo que un autovalor es 1, las posibles formas canónicas de Jordan serán:

a) Si hay un único autovalor (con multiplicidad 2) y la matriz es diagonalizable, la forma canónica de Jordan sería $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En este caso, la proyectividad sería la **identidad**.

b) Si hay un autovalor doble y la matriz no es diagonalizable, la forma canónica de Jordan sería $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se cumple además que f tiene un único punto doble (**proyectividad parabólica**).

Su ecuación canónica es: $x' = x + \alpha$.

c) Si hay dos autovalores distintos, la forma canónica de Jordan sería $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, con $\lambda \neq 1$. Se cumple además que f tiene dos puntos dobles (**proyectividad hiperbólica**).

Su ecuación canónica es: $x' = \alpha x$. En el caso particular de que sea una involución, $\alpha = -1$.

Si K no fuera algebraicamente cerrado (el caso natural en que pensar es $K = IR$), entonces tanto en el caso a) como en el caso b) el único autovalor está necesariamente en K. Sin embargo, en el caso c) hay que distinguir dos subcasos: que los dos autovalores estén en K o que ambos sean imaginarios (conjugados, si $K = IR$).

1.3.15 Proposición.
Sea $f : r \to r$ una proyectividad de una recta proyectiva en sí misma cuya matriz respecto de alguna referencia proyectiva es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces f tiene un único punto invariante p_0 , y se tiene que

$$[p_0, p; f(p), f(f(p))] = 2$$

para cualquier $p \in r - \{p_0\}$. Por tanto, f está determinada conociendo p_0 y la imagen de un punto distinto de él.

Demostración.
En las coordenadas respecto a las cuales la matriz de f es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene inmediatamente que $p_0 = (0,1)$ es el único punto invariante. Un punto p distinto de p_0 se puede escribir con coordenadas $(1, a)$, luego $f(p)$ tendrá coordenadas $(1, a+1)$ y $f(f(p))$ tendrá coordenadas $(1, a+2)$. Bajo la referencia $\{p_o, p, f(p)\}$ (que ya está normalizada, pues $(1, a+1) = (1, a) + (0,1)$), tenemos que

$f(f(p)) = (1, a+2) = 2(0,1) + (1,a)$, luego $\left[p_0, p; f(p), f(f(p))\right] = \frac{2}{1} = 2$.

Luego, conocidos p_0 y la imagen de un punto $f(p)$, la fórmula anterior permite conocer también la imagen de $f(p)$, con lo que tenemos la imagen de tres puntos, lo que determina de forma unívoca la proyectividad f.

1.3.16 Proposición.

Sea $f : r \to r$ una proyectividad de una recta proyectiva en sí misma cuya matriz respecto de alguna referencia proyectiva es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Entonces f tiene dos puntos dobles X_0 y X_1 tales que $\left[X_0 X_1; X; f(X)\right] = \lambda$ para todo $\lambda \neq X_0, X_1$.

Demostración.

Esta proposición se demostrará de forma más general en ????.

1.3.17 Definición. Ecuación implícita asociada a una proyectividad.

Sea una homografía $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ deducida de un isomorfismo $M : IR^2 \to IR^2$.

Respecto a sendas referencias proyectivas, la ecuación de una homografía viene dada por

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } ad - cb \neq 0$$

Usando coordenadas absolutas se tiene:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_0 = ax_0 + bx_1 \\ x'_1 = cx_0 + dx_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x' = \frac{x'_0}{x'_1} = \frac{ax_0 + bx_1}{cx_0 + dx_1} = \frac{ax_0 / x_1 + bx_1 / x_1}{cx_0 / x_1 + dx_1 / x_1} = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Para hacer este paso hemos supuesto que $x'_1 \neq 0 \Leftrightarrow (x'_0, x'_1) \neq (1,0)$, y por tanto hay que prescindir del punto de coordenadas $(-d, c)$, pues

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ad + bc \\ -cd + cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pues } -ad + bc \neq 0$$

y $x_1 \neq 0 \Leftrightarrow (x_0, x_1) \neq (1,0)$ y por tanto tampoco podemos tomar el punto cuyas coordenadas son (a, c):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

A estos puntos se les denomina **puntos límite** de la homografía, y se corresponden con los puntos impropios de la recta proyectiva.

Desarrollamos ahora la ecuación $x' = \dfrac{ax + b}{cx + d}$:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow (cx+d)x' = ax+b \Leftrightarrow cxx' + dx' = ax+b \Leftrightarrow cxx' + dx' - ax - b = 0$$

En general, una homografía vendrá dada por una ecuación

$$Ax'x + Bx' + Cx + D = 0 \text{ con } BC - AD \neq 0$$

y cuyos puntos límite son $(-B, A)$ y $(-C, A)$.

Si la ecuación de la homografía es $Axx' + Bx' + Cx + D = 0$, tomando el mismo sistema de coordenadas en ambos espacios proyectivos unidimensionales, resulta que los elementos dobles son aquellos cuyas coordenadas son las raíces de la ecuación:

$$A^2 + (B+C)x + D = 0$$

Cuando trabajamos en una recta proyectiva $P_1(K)$, la naturaleza de las raíces de esta ecuación depende del cuerpo K con el que estemos trabajando.
En todo cuerpo conmutativo el número de raíces no es superior a dos, y por tanto a lo sumo existen dos puntos dobles, exceptuando el caso de la identidad en que todos los puntos son dobles.

En el caso $K = IR$ los casos posibles son:

I. La ecuación tiene dos raíces reales distintas. La homografía tiene dos puntos dobles y por tanto es **hiperbólica**.
II. La ecuación no tiene solución (raíces imaginarias). No hay puntos dobles y por tanto es **elíptica**.
III. La ecuación tiene una sola raíz doble. Hay un solo punto doble y la proyectividad es **parabólica**.

La razón de tales apellidos se justificará más adelante cuando se estudien las cónicas.

En el caso K=ℂ, sólo hay proyectividades parabólicas e hiperbólicas.

Si el cuerpo es el de los cuaterniones, al ser no conmutativo, no podemos garantizar que el número de soluciones sea menor o igual a dos; por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene al menos seis raíces: i, j, k, -i, -j, -k (en realidad tiene un número infinito de raíces, todas las de forma $ai + bj + ck$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$).

1.3.18 Observación.
Dado que, fijada una referencia proyectiva, la matriz de una proyectividad respecto a dicha referencia es única salvo proporcionalidad, siempre que tengamos un autovalor en K (lo que es cierto siempre que K sea algebraicamente cerrado, por ejemplo si K=ℂ), dividiendo por él podemos suponer que 1 es un autovalor. Esto permite simplificar la clasificación de proyectividades.

Corolario.

Decimos que una proyectividad f de una recta en sí misma es cíclica de orden n si $f^n = Id$ y n es el menor entero con dicha propiedad. Las proyectividades cíclicas de orden n de un cuerpo de característica distinta de n no pueden ser parabólicas.

Demostración. Supongamos que f fuera una proyectividad parabólica. Entonces podríamos escribir f con su ecuación canónica $x' = x + \alpha$, y por tanto f^n tendría como ecuación $x' = x + n\alpha$. Luego $x = x + n\alpha \Rightarrow n\alpha = 0$, luego el cuerpo debe ser de característica n.

1.4 Razón doble.

1.4.1 Definición. Razón doble de cuatro puntos. (Primera definición).
Dados dos vectores $v=(v_1,v_2)$ y $w=(w_1,w_2)$ de IR^2, definimos su determinante por

$$Det(v,w)=\left[v,w\right]=\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}=v_1w_2-v_2w_1$$

Definimos la razón doble de cuatro vectores $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$, $c=(c_1,c_2)$ y $d=(d_1,d_2)$, por

$$\left[a,b;c,d\right]=\frac{\left[a,c\right]\left[b,d\right]}{\left[a,d\right]\left[b,c\right]}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}=\frac{\left(a_1c_2-a_2c_1\right)\left(b_1d_2-b_2d_1\right)}{\left(a_1d_2-a_2d_1\right)\left(b_1c_2-b_2c_1\right)}$$

(Si $\left[a,d\right]=0$ o $\left[b,c\right]=0$ diremos $(a,b;c,d)=\infty$)

La razón doble es compatible con la relación de equivalencia que define la recta proyectiva:

$$(\lambda_a a,\lambda_b b;\lambda_c c,\lambda_d d)=\frac{\left[\lambda_a a,\lambda_c c\right]\left[\lambda_b b,\lambda_d d\right]}{\left[\lambda_a a,\lambda_d d\right]\left[\lambda_b b,\lambda_c c\right]}=\frac{\lambda_a\lambda_c\lambda_b\lambda_d\left[a,c\right]\left[b,d\right]}{\lambda_a\lambda_d\lambda_b\lambda_c\left[a,d\right]\left[b,c\right]}$$
$$=\frac{\left[a,c\right]\left[b,d\right]}{\left[a,d\right]\left[b,c\right]}=(a,b;c,d)$$

Donde hemos aprovechado las propiedades lineales de los determinantes.

Así pues, la razón doble no depende de los representantes de $P_1(IR)$ que tomemos, y por lo tanto está bien definida en la recta proyectiva. Se denominará razón doble de cuatro puntos.

1.4.2 Proposición.
La razón doble es un invariante bajo homografías.

Demostración.
Sea $f:P_1(IR)\to P_1(IR)$ una homografía y sea M su matriz invertible 2x2 asociada.

$$\left[f(\left[a\right]),f(\left[b\right]);f(\left[c\right]),f(\left[d\right])\right]=\frac{\left[Ma,Mc\right]\left[Mb,Md\right]}{\left[Ma,Md\right]\left[Mb,Mc\right]}=\frac{Det(M)^2\left[a,c\right]\left[b,d\right]}{Det(M)^2\left[a,d\right]\left[b,c\right]}$$
$$=\frac{\left[a,c\right]\left[b,d\right]}{\left[a,d\right]\left[b,c\right]}=\left[a,b;c,d\right]$$

Donde hemos podido simplificar porque $Det(M)\neq 0$.

1.4.3 Definición. Razón doble de cuatro puntos. (Segunda definición).

Dados cuatro puntos distintos $A, B, C, D \in P_1(IR)$, hemos visto que existe un único cambio de variable f tal que $(1,0) \mapsto A$, $(0,1) \mapsto B$, $(1,1) \mapsto C$.
Por ser f biyectiva, se cumplirá $(\rho_0, \rho_1) \mapsto D$ para un único punto (ρ_0, ρ_1).
Definimos la razón doble $[A, B; C, D]$ por

$$[A, B; C, D] = \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

Esta definición está bien construida pues no depende de los representantes escogidos del punto. Efectivamente $[\rho_0, \rho_1] = [\rho'_0, \rho'_1] \Leftrightarrow (\rho_0, \rho_1) = k(\rho'_0, \rho'_1) \Leftrightarrow \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{k\rho_0}{k\rho_1}$

1.4.4 Teorema.
Las definiciones de 1.3.1 y 1.3.2 son compatibles.

Demostración.
Para el cambio de variable $(1,0) \mapsto A$, $(0,1) \mapsto B$, $(1,1) \mapsto C$, y $(\rho_0, \rho_1) \mapsto D$, al ser la razón doble invariante por proyectividades,

$$[A, B; C, D] = [(1,0), (0,1); (1,1), (\rho_0, \rho_1)] = \frac{(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1)(0 \cdot \rho_1 - 1 \cdot (1,0))}{(1 \cdot \rho_1 - 0 \cdot \rho_0)(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)} = \frac{-\rho_0}{-\rho_1} = \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

1.4.5 Teorema.
Dados tres puntos distintos $A, B, C \in P_1(IR)$, la aplicación

$$P_1(IR) - A \to IR$$
$$X \mapsto [A, B; C, X]$$

Es una biyección.

Demostración.
Consideremos la siguiente biyección:

$$IR \to P_1(IR) \to P_1(IR)$$
$$x \mapsto (x,1) \mapsto f(x,1)$$

La aplicación anterior es su inversa.

1.4.6 Proposición. Razón doble y permutaciones.
Sean a, b, c, d cuatro puntos de la recta proyectiva para los cuales $(a, b; c, d) = \lambda$.
Entonces:
a) $(a, b; c, d) = (b, a; d, c) = (c, d; a, b) = (d, c; b, a) = \lambda$
b) $(a, b; d, c) = 1/\lambda$
c) $(a, c; b, d) = 1 - \lambda$
d) El resto de permutaciones son consecuencia de las tres anteriores.

1.4.7 Corolario.
Si $(a, b; c, d) = \lambda$, los seis valores de la razón doble de los cuatro puntos bajo todas las permutaciones posibles son

$$\lambda\,,\frac{1}{\lambda}\,,1-\lambda\,,\frac{1}{1-\lambda}\,,\frac{\lambda}{1-\lambda}\,,\frac{1-\lambda}{\lambda}$$

En particular, estas seis funciones forman un grupo isomorfo a S_3.

1.4.7 Definición. Cuaterna armónica. División armónica de puntos.
Diremos que dos pares de puntos alineados A, B y C, D están en posición armónica (o forman una cuaterna armónica, o están en relación armónica) cuando

$$[A,B;C,D]=-1$$

Vemos que esta definición está bien construida, pues (por la proposición 1.4.5) es independiente del orden interno de cada par:
$(a,b;c,d)=-1 \Rightarrow (b,a;c,d)=-1$, $(a,b;d,c)=-1$, $(b,a;d,c)=-1$, $(c,d;a,b)=-1$.

1.4.8 Proposición. Puntos en posición armónica.
Sean $x,y\in R$ dos números cualesquiera. Entonces
a) $(-x,x;0,\infty)=-1$
b) $(0,2x;x,\infty)=-1$
c) $(x,y;\frac{x+y}{2},\infty)=-1$
d) $(-1,1;x,\frac{1}{x})=-1$
e) $(-x,x;1,x^2)=-1$

Demostración.

1.4.9 Definición. El cuarto armónico.
Dados tres puntos alineados A, B y C, el cuarto armónico (o conjugado armónico) es el punto D de la misma recta que satisface $[A,B;C,D]=-1$, es decir, que los cuatro puntos formen una cuaterna armónica.

1.4.10 Ejercicio.
Demostrar que sobre la recta proyectiva real, el conjugado armónico del punto impropio respecto del par A, B es el punto medio de (A, B).

Demostración.
Pasamos a coordenadas homogéneas para sacar el carácter singular del punto impropio : $A=(a,1)$, $B=(b,1)$, el punto impropio será $I=(1,0)$ y su conjugado armónico será $X=(x,1)$.
Entonces

$$-1=(A,B,I,X)=\frac{\begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b & x\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & x\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{(-1)(b-x)}{(a-x)(-1)}\Rightarrow -1=\frac{b-x}{a-x}$$

$$\Rightarrow x-a=b-x\Rightarrow 2x=a+b\Rightarrow x=\frac{a+b}{2}$$

1.5 Involuciones.

1.5.1 Definición. Involución.
Una involución es una proyectividad f tal que su cuadrado es la identidad:

$$f^2 = f \circ f = Id$$

En una involución, a los elementos homólogos (es decir, dobles) se les suelen denominar **conjugados**.

1.5.2 Proposición. Caracterización de una involución.
Sea una proyectividad $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ para la cual existe un punto P tal que $f(P) = Q \neq P$ y $f(Q) = P$, entonces es una involución.

Demostración.
Sea $P = [v]$ y $Q = f(P) = [w]$. Sea $f = [M]$ para cierta matriz M 2x2 invertible.
Entonces $Mv = \alpha w$ y $Mw = \beta v$ para ciertos escalares $\alpha, \beta \neq 0$. En la base $\{v, w\}$ la matriz será $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, y claramente

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $f^2 = Id$.

1.5.3 Proposición. Involuciones hiperbólicas.
Sea f una involución hiperbólica y X y X' sus puntos fijos. Para todo otro par de puntos P y $f(P)$ se tiene

$$[X, X', P, f(P)] = -1$$

Demostración.
Puesto que una involución es una proyectividad, conserva la razón doble, luego

$$[X, X', P, f(P)] = [f(X), f(X'), f(P), f(f(P))] = [X, X', f(P), P] = \frac{1}{[X, X', f(P), P]} \Rightarrow$$

$$[X, X', P, f(P)]^2 = 1 \Rightarrow [X, X', P, f(P)] = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

Pero si $[X, X', P, f(P)] = 1$ entonces $f(P) = P$ y la función sería la identidad. Luego $[X, X', P, f(P)] = -1$

1.5.4 Proposición. Involuciones hiperbólicas.
Dados dos puntos distintos $A, B \in P_1(IR)$, existe una única involución que tiene ambos puntos como puntos fijos.

Demostración.
Supongamos que $A = [v]$ y $B = [w]$.
Sea $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $f = [M]$.
En la base $\{v, w\}$, tenemos que $Mv = -v \approx v \Rightarrow f(A) = A$, y $Mw = w \Rightarrow f(B) = B$.

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id \Rightarrow f^2 = Id$, luego es una involución.
Además es única, puesto que por 1.5.3, para cualquier $X \in P_1(IR)$, $f(X)$ es el cuarto armónico de (A,B,X), luego es único.

1.5.5 Proposición.
Dados dos pares (A, A') y (B, B') (sin puntos comunes), existe una única involución respecto a la cual son pares conjugados.

Demostración.
Supongamos que $A \neq A'$. Entonces tenemos tres puntos y sus imágenes, luego por el Teorema fundamental existirá una única proyectividad f tal que $f(A) = A'$, $f(A') = A$ y $f(B) = B'$. Además, esta función es una involución por 1.5.2.
Luego $f(B') = f(f(B)) = B$, y se cumplen las condiciones deseadas.
Para el caso $B \neq B'$ el razonamiento es el mismo.
Si $A = A'$ y $B = B'$ aplicamos el 1.5.4.

1.5.6 Proposición. Ecuación implícita de una involución.
Sea $Ax'x + Bx' + Cx + D = 0$ la ecuación implícita asociada a la proyectividad.
Sea x_0 un punto tal que $f(x_0) = x_1 \neq x_0$ y $f(x_1) = x_0$.
Entonces se debe cumplir: $Ax_1x_0 + Bx_1 + Cx_0 + D = 0$ y también $Ax_0x_1 + Bx_0 + Cx_1 + D = 0$. Restando ambas ecuaciones llegamos a $(B - C)(x_1 - x_1) = 0$, y puesto que $x_1 \neq x_0$ se tiene $B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$.
Por lo tanto, la ecuación implícita de una involución será de la forma

$$Ax'x + B(x' + x) + D = 0 \text{ con } B^2 - AD \neq 0$$

1.5.7 Corolario.
Una involución en la recta proyectiva $P_1(K)$ o bien tiene dos puntos dobles (involución hiperbólica) o carece de ellos (involución elíptica). No existen involuciones con un solo punto doble.

Demostración.
Los puntos dobles de una involución serán las soluciones de la ecuación
$Ax^2 + 2Bx + D = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AD}}{2A} = \dfrac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - AD}}{2A}$, y puesto que $B^2 - AD \neq 0$, o bien tiene dos raíces reales distintas (involución hiperbólica), o bien ambas son imaginarias (involución elíptica).

1.5.8 Observación.
La composición de involuciones no es necesariamente una involución. Por ejemplo, sea f la involución que tiene por ecuación $x' + x = a$ y g la involución de ecuación $x' + x = b$, con $a \neq b$.
Entonces la composición $f \circ g$ tendrá por ecuación implícita:

$$\left.\begin{array}{l} f : x'' + x' = a \\ g : x' + x = b \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g : x'' + (b - x) = a \Leftrightarrow x'' - x = a - b$$

es decir, $f \circ g : x' - x = a - b$, y no es una involución.

1.5.9 Proposición. Involuciones armónicas.
Diremos que dos involuciones son armónicas cuando su composición es otra involución.
Dos involuciones son armónicas si y sólo si conmutan.

Demostración.
Sean f y g dos involuciones. Supongamos que conmutan, es decir, $f \circ g = g \circ f$.
Entonces $(f \circ g)^2 = f \circ g \circ f \circ g = f \circ f \circ g \circ g = Id \circ Id = Id$.
Supongamos que su composición es una involución, es decir,
$(f \circ g)^2 = f \circ g \circ f \circ g = Id$.
Entonces $g \circ f = Id \circ g \circ f \circ Id = f \circ f \circ g \circ f \circ g \circ g = f \circ Id \circ g = f \circ g$.

1.5.10 Proposición.
Toda proyectividad es el producto de dos involuciones.

Demostración.
Sea f una proyectividad $f : P_1(K) \to P_1(K)$. Sea P un punto cualquiera y tomamos en consideración la cadena de imágenes

$$P \to P' = f(P) \to P'' = f(P') \to P''' = f(P'')$$

Supongamos que $P \neq P' \neq P'' \neq P'''$.
Entonces la proyectividad queda determinada por los tres pares

$$P \mapsto P'$$
$$P' \mapsto P''$$
$$P'' \mapsto P'''$$

y se puede escribir como composición $f = g \circ h$ de las dos proyectividades determinadas por

$$\begin{array}{ccc} h : P_1(K) \to P_1(K) & & g : P_1(K) \to P_1(K) \\ P \mapsto P'' & & P'' \mapsto P' \\ P' \mapsto P' & \text{y} & P' \mapsto P'' \\ P'' \mapsto P & & P \mapsto P''' \end{array}$$

Ambas son involuciones por 1.5.2.

1.6 Escalas proyectivas.

1.6.1 Definición. Escala proyectiva.
Una escala proyectiva son tres puntos distintos cualesquiera de $P_1(IR)$, a los que llamaremos respectivamente ∞, 0, 1. Estos tres puntos se comportarán como “el punto en el infinito”, “el punto origen” y “el punto unidad” de la recta.

1.6.2 Lema.
Sea ∞, 0, 1 una escala proyectiva. Entonces
a) $(\infty,0;1,0)=0$
b) $(\infty,0;1,1)=1$
c) $(\infty,0;1,\infty)=\infty$

Demostración.
Simplemente hay que aplicar la fórmula 1.4.4 tomando $\infty=(1,0)$, $0=(0,1)$ y $1=(1,1)$:
$(\infty,0;1,0)=\frac{0}{1}=0$, $(\infty,0;1,1)=\frac{1}{1}=1$, y $(\infty,0;1,\infty)=\frac{1}{0}=\infty$.

1.6.3 Lema.
Supongamos que tenemos una escala proyectiva en IR tal que $0=(0,1)$, $1=(1,1)$ y $\infty=(1,0)$. Entonces, para todo $x\in IR$, tendremos $(\infty,0,;1,x)=x$.

Demostración. Suponiendo $x=(x_1,1)$,

$$(0,\infty;x,1)=\frac{[0,x][\infty,1]}{[0,1][\infty,x]}=\frac{\begin{vmatrix}0 & x_1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 0 & 0\end{vmatrix}}=\frac{-x_1}{-1}=x_1$$

Observación. La ventaja de una escala proyectiva es que es invariante por proyectividades.

1.6.4 Definición. Función real asociada a una función proyectiva.
Sea $\tau:P_1(IR)\to P_1(IR)$ una función biyectiva tal que $\tau(\infty)=\infty$.
Entonces τ induce una biyección $f_\tau:IR\to IR$ de la siguiente forma

$$\tau(p)=q\Rightarrow f_\tau((0,\infty;p,1))=(0,\infty;q,1)$$

1.6.5 Lema.
Sea $\tau:P_1(IR)\to P_1(IR)$ una función biyectiva armónica tal que $\tau(0)=0$, $\tau(1)=1$, $\tau(0)=0$. Entonces la biyección $f_\tau:IR\to IR$ asociada cumple:

a) $f_\tau(0)=0$
b) $f_\tau(1)=1$
c) $f_\tau\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f_\tau(x)+f_\tau(y)}{2}$

d) $f_\tau(2x) = 2f_\tau(x)$
e) $f_\tau(x+y) = f_\tau(x) + f_\tau(y)$
f) $f_\tau(-x) = -f_\tau(x)$
g) $f_\tau(x^2) = f_\tau(x)^2$
h) $f_\tau(x \cdot y) = f_\tau(x) \cdot f_\tau(y)$

Demostración.

1.6.6 Lema. El único automorfismo de IR es la identidad.
Sea $f : IR \to IR$ una función que satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Entonces f es la identidad.

Demostración. Puesto que 0 es el único elemento de IR que satisface $x + x = x$, y tenemos $f(0) + f(0) = f(0+0) = f(0)$, se deduce que $f(0) = 0$.
De la misma forma 1 es el único elemento de IR que satisface $x \cdot x = x$, luego de $f(1) \cdot f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)$ se deduce que $f(1) = 1$.
Para todo natural n podemos escribir $n = \underbrace{1+1+...+1}_{n\ veces}$, por lo que

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+...+1}_{n\ veces}) = \underbrace{f(1) + f(1) + ... + f(1)}_{n\ veces} = \underbrace{1+1+...+1}_{n\ veces} = n$$

De la propiedad $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ se deduce que para cualquier racional $q = \frac{m}{n}$, con $m, n \in IN$, tenemos $f(q) = q$, pues q es el único número que satisface la ecuación $f(m) \cdot q = f(n)$ teniendo en cuenta que $f(n) = n$ y $f(m) = m$.
Con razonamientos similares se demuestra que $f(-x) = -f(x)$ para cualquier $x \in IR$.

Todo número real positivo se puede escribir como x^2 para cierto $x \neq 0$. Así pues, de la propiedad $f(x^2) = f(x)^2$ deducimos que la función f envía números positivos a números positivos. Luego mantiene el orden: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Efectivamente, $x < y \Rightarrow 0 < y - x \Rightarrow 0 < f(y-x) = f(y) - f(x) \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Si f no fuera la identidad, existiría un número a tal que $f(a) \neq a$. Luego o bien $a < f(a)$ o bien $a > f(a)$. Supongamos que $a < f(a)$. Puesto que los números racionales son densos en IR, existirá un racional $p \in (a, f(a))$. Hemos visto que $f(p) = p$ por ser p un racional, y $a < p \Rightarrow f(a) < f(p)$, pero $f(p) = p < f(a)$, luego $f(a) < f(a)$, absurdo. Un razonamiento similar con $a > f(a)$ lleva igualmente al absurdo.

1.6.7 Corolario.
Toda transformación armónica $\tau : P_1(IR) \to P_1(IR)$ es una proyectividad.

Demostración.
Fijamos en $P_1(IR)$ una escala proyectiva 0, 1 , ∞ que mediante τ se transformará en la escala proyectiva 0', 1' , ∞'.

La proposición 1.4.2 garantiza que existirá una proyectividad $\phi: P(IR) \to P(IR)$ tal que $\phi(0') = 0$, $\phi(1') = 1$ y $\phi(\infty') = \infty$.

Toda proyectividad es una transformación armónica por 1.4.3, luego $\varphi : \phi \circ \tau$ será una transformación armónica cumpliendo $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ y $\varphi(\infty) = \infty$.
Por lo tanto, por el lema 1.5.5, su función real asociada $f_\varphi : IR \to IR$ será un automorfismo de la recta real. Luego por el lema 1.5.6, f_φ será la identidad, por lo que $\varphi : \phi \circ \tau$ también será la identidad. Así pues, $\tau = \phi^{-1}$ una proyectividad.

1.7 Transformaciones de Möbius.

1.7.1 Definición. Transformaciones de Möbius.
Definimos una transformación de Möbius como la expresión

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

donde $x \in IR$ y $a,b,c,d \in IR$ constantes y no todas ellas cero.

Obviamente esta función no está definida para $x = \frac{-d}{c}$.

1.7.2 Proposición.

La transformación de Möbius $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ define una función $f : P_1(IR) \to P_1(IR)$ que es biyectiva si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

Definimos $f(-d/c) = \infty$

Y solamente hace falta definir $f(\infty)$. Ahora bien,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{y\to 0} \frac{a(1/y)+b}{c(1/y)+d} = \lim_{y\to 0} \frac{a+by}{c+dy} = \frac{a}{c}$$

Luego definiremos

$$f(\infty) = \begin{cases} a/c & c \neq 0 \\ \infty & c = 0 \end{cases}$$

Esta función tendrá como inversa $x = g(y) = \frac{d\,y-b}{-c\,y+a}$

Efectivamente

$$g(f(x)) = \frac{d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)-b}{-c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+a} = \frac{d\,(ax+b)-b(cx+d)}{-c(ax+b)+a(cx+d)} =$$

$$= \frac{dax+db-bcx-bd}{-cax-cb+acx+ad} = \frac{dax-bcx}{-cb+ad} = \frac{(da-bc)x}{-cb+ad} = x$$

En el último paso y para poder simplificar utilizamos la hipótesis $ad - bc \neq 0$.

Supongamos ahora que $ad - bc = 0$, y veamos que la función $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ no es biyectiva. De hecho veremos que es la función identidad.

Supongamos que $c \neq 0$. Entonces

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{c(ax+b)}{c(cx+d)} = \frac{acx+bc}{c(cx+d)} = \frac{acx+ad}{c(cx+d)} = \frac{a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{a}{c} \text{ constante.}$$

Con razonamientos similares llegamos al mismo resultado suponiendo que alguna constante a, b o d es diferente de cero.

1.7.3 Proposición.
El conjunto de transformaciones de Möbius

$$\Pr(1) = \left\{ f : P_1(IR) \to P_1(IR),\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ ad-bc \neq 0 \right\}$$

Tiene estructura de grupo con la composición de funciones.

Demostración.
La función identidad pertenece claramente a este grupo, basta con tomar $a = d = 1$ y $b = c = 0$.
Hemos visto que la función inversa de una transformación de Möbius es $g(y) = \dfrac{d\,y - b}{-c\,y + a}$, que cumple también $da - (-c)(-b) = da - cb \neq 0$.
Por último, hemos de ver que la composición de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius:

Si $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ con $ad - bc \neq 0$ y $g(x) = \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}$ con $a'd' - b'c' \neq 0$, entonces

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{a'\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+b'}{c'\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+d'} = \frac{\frac{a'ax+a'b}{cx+d}+b'}{\frac{c'ax+c'b}{cx+d}+d'} = \frac{a'ax+a'b+b'(cx+d)}{c'ax+c'b+d'(cx+d)} =$$

$$= \frac{a'ax+a'b+b'cx+b'd}{c'ax+c'b+d'cx+d'd} = \frac{(a'a+b'c)x+a'b+b'd}{(c'a+d'c)x+c'b+d'd}$$

Tomando pues

$$a'' = a'a + b'c$$
$$b'' = a'b + b'd$$
$$c'' = c'a + d'c$$
$$d'' = c'b + d'd$$

Obtenemos una nueva transformación de Möbius, pues

$$a''d'' - b''c'' = (a'a+b'c)(c'b+d'd) - (a'b+b'd)(c'a+d'c) =$$
$$= a'ac'b + a'ad'd + b'cc'b + b'cd'd - a'bc'a - a'bd'c - b'dc'a - b'dd'c =$$
$$= a'ad'd + b'cc'b - a'bd'c - b'dc'a =$$
$$= (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0$$

Pues es el producto de dos números diferentes de cero.

1.7.4 Proposición. Transformación de Möbius inducida por una proyectividad.

Toda proyectividad

$$\varphi : P(IR) \to P(IR)$$
$$[v] \mapsto [Mv]$$

para cierta matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertible, es decir, $ad - bc \neq 0$, induce una transformación de Möbius $f : IR \to IR$ de la siguiente forma:

$$IR \to P(IR) \overset{\varphi}{\to} P(IR) \to IR$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ax+b}{cx+d} \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{ax+b}{cx+d}$$

1.7.5 Proposición. El grupo afín dentro del grupo proyectivo.
El Grupo afín es el conjunto de funciones de la forma

$$\mathrm{Af}(1) = \{ f : R \to R,\ f(x) = ax + b \ , a\ o\ b \neq 0 \}$$

Entonces claramente $\mathrm{Af}(1) \subset \mathrm{Pr}(1)$, y se caracterizan por ser las transformaciones de Möbius que dejan fijo el punto del infinito.

Para que una transformación de Möbius $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ deje fijo el punto del infinito se debe cumplir

$$\frac{a}{c} = f(\infty) = \infty \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d} \in \mathrm{Af}(1)$$

2 El plano proyectivo real.

2.1 Construcción. Referencias proyectivas. Coordenadas homogéneas.

2.1.1 Definición. El plano proyectivo real.

Definimos el plano proyectivo real $P_2(IR)$ como el conjunto $IR^3 - \{(0,0,0)\}$ bajo la siguiente relación de equivalencia:

$$(a,b,c) \cong (d,e,f) \Leftrightarrow \exists \lambda \in IR - \{0\} \mid (a,b,c) = \lambda(d,e,f)$$

$$P_2(IR) = \frac{IR^3 - \{(0,0,0)\}}{IR - \{0\}}$$

Es decir, los elementos de $P_2(IR)$ serán los subespacios vectoriales de dimensión 1 de IR^3.

2.1.2 Definición. Referencia proyectiva. Coordenadas homogéneas de un punto.

Una referencia proyectiva, o sistema de coordenadas homogéneas, de $P_2(IR)$ es un conjunto ordenado de cuatro puntos $(P_1, P_2, P_3; P_4) \subset P_2(IR)$ tales que, si $P_i = \lfloor \vec{v_i} \rfloor$, se cumple:

a) $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ forman una base de IR^3.
b) $\vec{v_3} = \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}$.

Dado un sistema de coordenadas homogéneas $(P_1, P_2, P_3; P_4)$, cualquier punto $P \in P_2(IR)$ tendrá una única presentación salvo homotecias de la forma

$$P = \lfloor a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3} \rfloor$$

Diremos que (a,b,c) son las **coordenadas proyectivas**, o coordenadas homogéneas del punto P bajo la referencia $(P_1, P_2, P_3; P_4)$, y escribiremos

$$P = a P_1 + b P_2 + c P_3$$

En particular, $P_1 = (1,0,0)$, $P_2 = (0,1,0)$, $P_3 = (0,0,1)$ y $P_4 = (1,1,1)$.

Al punto P_4 se le suele llamar **punto unidad** de la referencia.

2.1.3 Nota histórica.

Las coordenadas homogéneas se pueden considerar como una extensión de las coordenadas baricéntricas, que fueron introducidas por August Ferdinand Möbius (1790-1868). Las coordenadas homogéneas aparecen por primera vez en 1830 en el artículo “Ueber ein neues Coordinatensystem” de Julius Plücker.

2.1.4 Ejemplo.

Cualquier triángulo ABC del plano afín, junto con cualquier punto D que no pertenezca a dicho triángulo forman una referencia proyectiva $(A,B,C;D)$.

En efecto, pongamos $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, $C=(c_1,c_2)$ y $D=(d_1,d_2)$.Estos puntos puntos, considerados dentro del plano proyectivo, serán $A=(a_1,a_2,1)$, $B=(b_1,b_2,1)$, $C=(c_1,c_2,1)$ y $D=(d_1,d_2,1)$.
Puesto que A, B y C no están alineados, por 2.2.2 tenemos

$$0 \neq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Luego existirán a,b y c únicos para los que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando ahora $A=a(a_1,a_2)$, $B=b(b_1,b_2)$, $C=c(c_1,c_2)$, se cumplen las condiciones exigidas para una referencia proyectiva.

En general, las coordenadas (x,y,z) de cualquier punto $P=(p_1,p_2,p_3)$ del plano proyectivo, serán las soluciones del sistema lineal compatible determinado

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

2.1.5 Definición. Referencia proyectiva baricéntrica.
La referencia proyectiva baricéntrica es la que queda definida mediante un triángulo ABC y su baricentro D.

$$D=\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C$$

Es decir, cuando tomamos los coeficientes de D como $a=b=c=1$.

2.2 Rectas del plano. Dualización.

2.2.1 Definición. Rectas del plano proyectivo. El plano proyectivo dual.
Definimos las rectas del plano proyectivo como otra copia de

$$P_2(IR) = \frac{IR^3 - \{(0,0,0)\}}{IR - \{0\}}$$

Definimos la relación de incidencia entre la recta (a,b,c) y el punto $(x,y,z) \in P_2(IR)$ de la siguiente manera:

$$(x,y,z) \in (a,b,c) \Leftrightarrow ax + by + cz = 0$$

Esta definición está bien hecha porque no depende del representante escogido del punto:
$(x,y,z) = \lambda(x',y',z'), \lambda \neq 0 \Rightarrow ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow a\lambda x' + b\lambda y' + c\lambda z' = 0$
$\Leftrightarrow \lambda(ax' + by' + cz') = 0 \Leftrightarrow ax' + by' + cz' = 0$

Ni tampoco depende del representante escogido de la recta:
$(a,b,c) = \lambda(a',b',c'), \lambda \neq 0 \Rightarrow ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow \lambda a' x + \lambda b' y + \lambda c' z = 0$
$\Leftrightarrow \lambda(a' x + b' y + c' z) = 0 \Leftrightarrow a' x + b' y + c' z = 0$

2.2.2 Proposición. Caracterización de tres puntos alineados.
Tres puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ están alineados si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración.

2.2.3 Proposición. Recta que pasa por dos puntos.
Dos puntos A y B diferentes determinarán una única recta r_{AB} que pasa por ambos.

Demostración.
Sean $A = (x_1, y_1, z_1)$ y $B = (x_2, y_2, z_2)$. Basta tomar el producto mixto de ambos vectores:

$$r_{AB} = A \times B = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Es fácil comprobar que el vector r_{AB} es ortogonal a A y B, y por tanto, considerado como recta del plano, contiene a ambos puntos.
Además es único salvo homotecias:
Puesto que los vectores A y B no son proporcionales, la matriz $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ tendrá rango 2, y por lo tanto el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un sistema compatible indeterminado de rango 2.

2.2.4 Corolario. Ecuación de los puntos de una recta.
Dados dos puntos $A = (x_1, y_1, z_1)$ y $B = (x_2, y_2, z_2)$, los puntos de la recta AB quedarán determinados por la ecuación lineal

$$\begin{vmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración.

2.2.5 Proposición. Punto de intersección de dos rectas.
Dos rectas diferentes r y s tienen un único punto de corte. Por lo tanto en el plano proyectivo no existe el paralelismo de rectas.

Demostración. Es exactamente el mismo razonamiento de 2.2.2: Dadas las rectas $r = (r_1, r_2, r_3)$ y $s = (s_1, s_2, s_3)$, consideradas como vectores, nuevamente el producto mixto $P = r \times s$ nos dará un vector ortogonal a ambos, es decir, un punto que pasa por ambas rectas.

2.2.6 Proposición. El cuadriángulo completo fundamental.
Los puntos $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$ y $D = (1,1,1)$ de $P_2(IR)$ forman un cuadriángulo completo (ver 5.2.4): No hay ningún subgrupo de tres que esté alineado. Además, los puntos diagonales: $P = AB \cap CD$, $Q = AD \cap BC$ y $R = AC \cap BD$ no están alineados, formando lo que se denomina “**triángulo diagonal**” asociado al cuadriángulo.

Demostración.
Por la caracterización 2.2.2 es fácil ver que no hay ningún grupo de tres que sea colineal.
Veamos los puntos diagonales:

$$\left.\begin{array}{l} AB: z = 0 \\ CD: x = y \end{array}\right\} \Rightarrow P = AB \cap CD = (1,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} AD: y = z \\ BC: x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = AD \cap BC = (0,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} AC: y = 0 \\ BD: x = z \end{array}\right\} \Rightarrow R = AC \cap BD = (1,0,1)$$

Los puntos P, Q y R no están alineados:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

2.2.7 Proposición. Parametrización de una recta.
Definimos por parametrización de una recta r a toda biyección

$$f : P_1(IR) \to r$$

de la forma

$$(\alpha,\beta) \mapsto (a_0\alpha + b_0\beta, a_1\alpha + b_1\beta, a_2\alpha + b_2\beta)$$

para ciertos $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in IR$.
Una función definida de esta manera determinará una biyección si y sólo si $P = (a_0, a_1, a_2)$ y $Q = (b_0, b_1, b_2)$ son dos puntos diferentes de la recta r.

Una parametrización se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Demostración.
Supongamos que $P = (a_0, a_1, a_2)$ y $Q = (b_0, b_1, b_2)$ son dos puntos diferentes de la recta r.
En primer lugar tenemos que ver que la función está bien definida. En efecto, si
$(\alpha', \beta') = \lambda(\alpha,\beta) \Rightarrow (a_0\alpha' + b_0\beta', a_1\alpha' + b_1\beta', a_2\alpha' + b_2\beta') =$
$= (a_0\lambda\alpha + b_0\lambda\beta, a_1\lambda\alpha + b_1\lambda\beta, a_2\lambda\alpha + b_2\lambda\beta) =$
$= \lambda(a_0\alpha + b_0\beta, a_1\alpha + b_1\beta, a_2\alpha + b_2\beta) = (a_0\alpha + b_0\beta, a_1\alpha + b_1\beta, a_2\alpha + b_2\beta)$
La función es inyectiva:
Si $(\alpha,\beta) \mapsto (0,0,0)$, entonces los vectores $P = (a_0, a_1, a_2)$ y $Q = (b_0, b_1, b_2)$ serían linealmente dependientes, contradiciendo la hipótesis de que son diferentes como puntos proyectivos.
La función es exhaustiva:
Si X$\in PQ$, entonces existirá un cuatro vector T tal que $\langle T, X\rangle = \langle T, P\rangle = \langle T, Q\rangle = 0$.
Puesto que P y Q son linealmente independientes, la única posibilidad es que X sea combinación lineal de P y Q es decir $X = \alpha P + \beta Q$ para ciertos α, β ambos no nulos.

Recíprocamente, supongamos que la función anterior es una biyección. Entonces
$(1,0) \mapsto (a_0 1 + b_0 0, a_1 1 + b_1 0, a_2 1 + b_2 0) = (a_0, a_1, a_2) = P \in r$
$(0,1) \mapsto (a_0 0 + b_0 1, a_1 0 + b_1 1, a_2 0 + b_2 1) = (b_0, b_1, b_2) = Q \in r$
y son puntos diferentes pues es inyectiva.

2.2.5 Proposición. Caracterización de la parametrización de una recta.
Dados $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in IR$, son equivalentes:
a) $(\alpha,\beta) \mapsto (a_0\alpha + b_0\beta, a_1\alpha + b_1\beta, a_2\alpha + b_2\beta)$ es una parametrización de una recta.
b) $(\alpha,\beta) \mapsto (a_0\alpha + b_0\beta, a_1\alpha + b_1\beta, a_2\alpha + b_2\beta)$ está bien definida, es decir, no existe ningún valor $(\alpha,\beta) \in P_1(IR)$ tal que $(a_0\alpha + b_0\beta, a_1\alpha + b_1\beta, a_2\alpha + b_2\beta) = (0,0,0)$

c) La matriz $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ tiene rango dos.

Demostración.
a) $\Rightarrow$b) Es inmediato.
b) $\Rightarrow$c) Si la matriz tuviera rango 1, entonces $(a_0, a_1, a_2) = \lambda(b_0, b_1, b_2)$ para cierto $\lambda \neq 0$ y por tanto $(-1, \lambda) \mapsto (-a_0 + b_0\lambda, -a_1 + b_1\lambda, -a_2 + b_2\lambda) = (0,0,0)$ contradiciendo b).
c) $\Rightarrow$a) Por hipótesis, los puntos (a_0, a_1, a_2) y (b_0, b_1, b_2) son distintos, y por tanto por el corolario 2.2.5, la función definirá una parametrización de la recta determinada por ambos.

2.2.6 Proposición. La inversa de una parametrización.
Una parametrización de una recta r, escrita en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{con } M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

queda caracterizada en que su matriz asociada M tiene rango 2. Este hecho lo podemos utilizar para determinar su función inversa. Efectivamente, si la matriz anterior tiene rango 2, al menos dos filas serán linealmente independientes, supongamos que sean las dos primeras. Luego el morfismo
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ es un isomorfismo, con matriz invertible $M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$.

Luego podemos determinar fácilmente su inversa:

$$M^{-1} = \frac{1}{Det(M)} \begin{pmatrix} b_1 & -b_0 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Y puesto que toda función proyectiva puede ser multiplicada por un escalar no cero, podemos multiplicar por su determinante para obtener la función inversa:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & -b_0 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

O escrita en forma paramétrica como

$$(\alpha, \beta) = (b_1 x - b_0 y, -a_1 x + a_0 y)$$

2.2.7 Observación.
Dados dos puntos P y Q del plano proyectivo, existen infinitas parametrizaciones diferentes tales que $(1,0) \mapsto P$ y $(0,1) \mapsto Q$. Por ejemplo, si queremos parametrizar la recta que pasa por P=(1,0,1) y Q=(0,1,1) obtenemos la parametrización

$$(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, \beta, \alpha + \beta)$$

Pero también podemos tomar la parametrización

$$(\alpha, \beta) \mapsto (2\alpha, -\beta, 2\alpha - \beta)$$

Ambas parametrizaciones envían (1,0) a P y (0,1) a Q, pero en la primera $(1,1) \mapsto (1,1,2)$ y en la segunda $(1,1) \mapsto (2,-1,1)$, y $[(1,1,2)] \neq [(2,-1,1)]$.

Si queremos fijar una única parametrización de la recta, necesitaremos un tercer punto, como veremos en la próxima proposición.

2.2.9 Proposición.
Sea r una recta proyectiva y $P = (p_0, p_1, p_2)$, $Q = (q_0, q_1, q_2)$ y $R = (r_0, r_1, r_2)$ tres puntos diferentes de r. Entonces existe una única parametrización de la recta de forma que

$$\begin{aligned} &P_1(IR) \to r \\ &(1,0) \mapsto P \\ &(0,1) \mapsto Q \\ &(1,1) \mapsto R \end{aligned}$$

Demostración.
Los puntos P, Q y R son colineales, luego los vectores (p_0, p_1, p_2), (q_0, q_1, q_2) y (r_0, r_1, r_2) son linealmente dependientes, es decir, existirán a, b y c tales que

$$a(p_0, p_1, p_2) + b(q_0, q_1, q_2) + c(r_0, r_1, r_2) = 0$$

Los tres puntos son diferentes, luego $a, b, c \neq 0$. Luego

$$(r_0, r_1, r_2) = \frac{-a}{c}(q_0, q_1, q_2) + \frac{-b}{c}(r_0, r_1, r_2)$$

Es decir, hemos encontrado dos números $A = \frac{-a}{c}$ y $B = \frac{-b}{c}$, diferentes de cero para los cuales

$$(p_0, p_1, p_2) = A(q_0, q_1, q_2) + B(r_0, r_1, r_2)$$

La parametrización

$$(\alpha, \beta) \mapsto (Ap_0\alpha + Bq_0\beta, Ap_1\alpha + Bq_1\beta, Ap_2\alpha + Bq_2\beta)$$

cumple las condiciones deseadas:

$$(1,0) \mapsto (Ap_0 1 + Bq_0 0, Ap_1 1 + Bq_1 0, Ap_2 1 + Bq_2 0) = (Ap_0, Ap_1, Ap_2) = (p_0, p_1, p_2) = P$$
$$(0,1) \mapsto (Ap_0 0 + Bq_0 1, Ap_1 0 + Bq_1 1, Ap_2 0 + Bq_2 1) = (Bq_0, Bq_1, Bq_2) = (q_0, q_1, q_2) = Q$$
$$(1,1) \mapsto (Ap_0 1 + Bq_0 1, Ap_1 1 + Bq_1 1, Ap_2 1 + Bq_2 1) = (r_0, r_1, r_2) = R$$

Además, esta parametrización es única, puesto que los números a, b y c son únicos salvo homotecias.

2.2.10 Observación.
La proposición anterior es constructiva, es decir, nos indica el método para determinar la parametrización de la recta.
Por ejemplo, supongamos que queremos determinar la (única) parametrización de la recta $x + y - z = 0$ que envía (1,0) a (1,2,3), (0,1) a (2,3,5) y (1,1) a (1,-1,0).

Entonces, lo primero que debemos hacer es encontrar la combinación lineal

$$(1,-1,0) = A(1,2,3) + B(2,3,5)$$

Tal relación es $(1,-1,0) = -5(1,2,3) + 3(2,3,5) = (-5,-10,-15) + (6,9,15)$

Luego la parametrización deseada es

$$(\alpha, \beta) \mapsto (-5\alpha + 6\beta, -10\alpha + 9\beta, -15\alpha + 15\beta)$$

2.2.12 Lema.
Sea $f : P_1(IR) \to r$ una parametrización de la recta r. Entonces todas las parametrizaciones de la recta r son de la forma $f \circ \psi$ donde ψ es un cambio de variable en $P_1(IR)$.

Demostración.
Sea $f : P_1(IR) \to r$ con $(\alpha, \beta) \mapsto (a_0\alpha + b_0\beta, a_1\alpha + b_1\beta, a_2\alpha + b_2\beta)$ una parametrización de la recta r.

En forma matricial: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Sea $\psi : P_1(IR) \to P_1(IR)$ con $(\alpha, \beta) \mapsto (a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta)$ un cambio de variable en $P_1(IR)$.

En forma matricial: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ con $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertible.

Entonces la composición $f \circ \psi : P_1(IR) \to r$ tendrá la forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

El producto de las dos matrices será una matriz 3x2 con rango 2, luego por 2.2.6(c) será una parametrización de la recta.

Recíprocamente, si $g : P_1(IR) \to r$ es otra parametrización, entonces $f^{-1} \circ g : P_1(IR) \to P_1(IR)$ será un cambio de variable ψ de $P_1(IR)$, y por tanto $g = f \circ \psi$.

2.2.13 Corolario. Matriz de cambio de coordenadas.
Dados dos puntos diferentes $[p],[q] \in P_2(IR)$, y otros dos puntos diferentes $[p'],[q'] \in P^2(IR)$ de la misma recta r, entonces

$$s \in r \Leftrightarrow s = \alpha\, p + \beta\, q = \alpha'\, p' + \beta'\, q'$$

Las coordenadas (α', β') se pueden deducir de (α, β) mediante una matriz M invertible 2x2 que depende únicamente de p, q, p', q'.

Demostración.

$p \in r \Rightarrow p = \alpha_p p' + \beta_p q'$, y de la misma forma $q \in r \Rightarrow q = \alpha_q p' + \beta_q q'$.
Luego

$$s \in r \Rightarrow s = \alpha\, p + \beta\, q = \alpha\left(\alpha_p p' + \beta_p q'\right) + \beta\left(\alpha_q p' + \beta_q q'\right) =$$
$$= \alpha\,\alpha_p p' + \alpha\,\beta_p q' + \beta\alpha_q p' + \beta\beta_q q' = \left(\alpha\,\alpha_p + \beta\alpha_q\right)p' + \left(\alpha\,\beta_p + \beta\beta_q\right)q'$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_p & \alpha_q \\ \beta_p & \beta_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

y la matriz $M = \begin{pmatrix} \alpha_p & \alpha_q \\ \beta_p & \beta_q \end{pmatrix}$ es invertible puesto que los vectores $\left(\alpha_p, \beta_p\right)$ y $\left(\alpha_q, \beta_q\right)$ no son proporcionales ya que $p \neq q$.

2.2.14 Definición. Abscisa de un punto.
En 2.2.4 hemos visto que, fijados dos puntos diferentes $[p],[q] \in P_2(IR)$, la recta r que determinan se podrá expresar como

$$r = \left\{ \left[\alpha\, p + \beta\, q\right] \mid (\alpha, \beta) \in IR^2 - \langle(0,0)\rangle \right\}$$

Para todo punto $X \in r$, $X = \left[\alpha\, p + \beta\, q\right]$, pero si además $X \neq A$, entonces $\beta \neq 0$ y por tanto $X = \left[\dfrac{\alpha}{\beta} p + q\right]$.

Diremos que la $x = \dfrac{\alpha}{\beta}$ es la abscisa (o coordenada absoluta) del punto X.

2.2.15 Definición. Rectas expresadas en coordenadas proyectivas.
Dados dos puntos $P, Q \in P_2(IR)$ distintos, la recta PQ será el conjunto de puntos del plano $R \in P_2(IR)$ que se pueden expresar como $R = \alpha P + \beta Q$, para ciertos $\alpha, \beta \in IR$.

Si $R \neq Q \Rightarrow \alpha \neq 0 \Rightarrow R = P + \dfrac{\beta}{\alpha} Q$, es decir, todo punto $R \neq Q$ se puede expresar de la forma $R = P + \lambda Q$.

Si un punto se puede expresar de dos maneras diferentes $\alpha P + \beta Q = \alpha' P' + \beta' Q'$ entonces pertenece a ambas rectas PQ y P'Q' y por tanto coincide con su intersección.

2.3 La razón doble.

2.3.1 Definición. Razón doble de cuatro puntos alineados distintos.
Sean A, B, C y D cuatro puntos alineados de una recta r. Sea $\varphi : P_1(IR) \to r$ la única parametrización de r tal que $\varphi(1,0) = A$, $\varphi(0,1) = B$, $\varphi(1,1) = C$. Entonces llamaremos razón doble de los cuatro puntos A, B, C y D, y escribiremos $[A,B;C,D]$, a la abscisa de D respecto a la referencia $\{A,B,C\}$, es decir:

$$\varphi(\rho_0, \rho_1) = D \Leftrightarrow [A,B;C,D] = \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

Equivalentemente,

$$[A,B;C,D] = \rho \Leftrightarrow \varphi(\rho,1) = D$$

Esta definición está bien construida porque $\rho_1 \neq 0$ al suponer $D \neq A$.

2.3.2 Definición. Razón doble de cuatro puntos alineados distintos.
Sean A, B, y C tres puntos diferentes de una recta r. La aplicación

$$\begin{aligned} r - A &\to IR \\ X &\mapsto [A,B;C,X] \end{aligned}$$

es una biyección.
Además $[A,B;C,X] = 1 \Leftrightarrow X = C$, y $[A,B;C,X] = 0 \Leftrightarrow X = B$

Demostración.
Es una consecuencia del hecho de que las parametrizaciones son biyecciones.

2.3.3 Definición. Cuaterna armónica.
Diremos que cuatro puntos ordenados, diferentes y alineados (A,B,C,D) forman una cuaterna armónica cuando $[A,B;C,D] = -1$

2.3.4 Proposición. Razón doble y escalas proyectivas.
La definición de razón doble de 2.3.1 se puede ampliar a los casos en que D sea alguno de los tres puntos A, B o C. En este caso, si nombramos $A = \infty$, $B = 1$ y $C = 1$, entonces:

a) $[\infty,0,1,\infty] = \infty$ (entendiendo el símbolo ∞ como descripción de la situación $\frac{1}{0}$)

b) $[\infty,0,1,0] = 0$

c) $[\infty,0,1,1] = 1$

Es decir, la razón doble es compatible con la idea de abscisa de un punto bajo una escala proyectiva fijada $\{A,B,C\} = \{\infty,0,1\}$.

Demostración.
Basta con aplicar la definición de razón doble:

$$[\infty,0,1,\infty] = \frac{1}{0} = \infty,\ [\infty,0,1,0] = \frac{0}{1} = 0,\ [\infty,0,1,0] = \frac{1}{1} = 1$$

2.3.5 Proposición.
La definición dada en 2.4.1 se puede generalizar:

Dados cuatro puntos A, B, C y D en una recta r, tomando cualquier referencia proyectiva sobre r, si las coordenadas de A, B, C y D son respectivamente: $A=(a_0,a_1)$, $B=(b_0,b_1)$, $C=(c_0,c_1)$ y $D=(d_0,d_1)$, entonces:

$$[A,B;C,D]=\frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}$$

Demostración.
La fórmula dada en el enunciado es cierta para la parametrización $\varphi: P_1(IR)\rightarrow r$ tal que $\varphi(1,0)=A$, $\varphi(0,1)=B$, $\varphi(1,1)=C$:

$$[A,B;C,D]=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & \rho_0 \\ 1 & \rho_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_0 \\ 0 & \rho_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1(-\rho_0)}{\rho_1(-1)}=\frac{\rho_0}{\rho_1}$$

Para cualquier otra parametrización φ', podemos escribir $\varphi'=\psi\circ\varphi$ para cierto cambio de variable ψ de $P_1(IR)$, y vimos en XX.XX que los cambios de variable dejan la razón doble invariante.

2.3.6 Proposición. Razón doble expresada en coordenadas proyectivas.
Si $A,B,C,D\in XY$, y $A=X+aY$, $B=X+bY$, $C=X+cY$ y $D=X+dY$, entonces

$$[A,B;C,D]=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$$

Demostración.
En este caso $A=(1,a)$, $B=(1,b)$, $C=(1,c)$ y $D=(1,d)$ y por tanto

$$[A,B;C,D]=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}}=\frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$$

2.3.7 Lema.
Sean $A,B,C,D,D'\in r$ cinco puntos alineados. Entonces

$$[A,B;C,D]=[A,B;C,D']\Leftrightarrow D=D'$$

Demostración.
Es una consecuencia directa de la biyectividad de las parametrizaciones. Sea $\varphi: P_1(IR)\rightarrow r$ la única parametrización de s tal que $\varphi(1,0)=A$, $\varphi(0,1)=B$ y $\varphi(1,1)=C$.
$[A,B;C,D]=\rho\Leftrightarrow\varphi(\rho,1)=D$, $[A,B;C,D']=\rho'\Leftrightarrow\varphi(\rho',1)=D'$, luego
$[A,B;C,D]=[A,B;C,D']\Rightarrow D=\varphi(\rho,1)=\varphi(\rho',1)=D'$.
La implicación contraria es trivial.

2.3.8 Teorema.
Sea $f: r \to s$ una aplicación inyectiva entre dos rectas. Entonces f es una proyectividad si y sólo si para a cada $A, B, C, D \in r$ distintos se tiene

$$[A,B;C,D] = [f(A), f(B); f(C), f(D)]$$

Demostración.
Veamos en primer lugar que las proyectividades conservan la razón doble. Supongamos que f es una proyectividad y sean $A, B, C, D \in r$ distintos. Sea $\varphi : P_1(IR) \to r$ la única parametrización de r tal que $\varphi(1,0) = A$, $\varphi(0,1) = B$, $\varphi(1,1) = C$.
Entonces, por definición,

$$[A,B;C,D] = \rho \Leftrightarrow \varphi(\rho,1) = D$$

Puesto que f es inyectiva, $f(A), f(B), f(C), f(D) \in s$ serán diferentes, y $\varphi' = f \circ \varphi$ será la única parametrización de s tal que $\varphi'(1,0) = f(A)$, $\varphi'(0,1) = f(B)$, $\varphi'(1,1) = f(C)$, luego

$$[f(A), f(B); f(C), f(D)] = \rho' \Leftrightarrow \varphi'(\rho',1) = f(D)$$

Pero $\varphi'(\rho,1) = (f \circ \varphi)(\rho,1) = f(\varphi(\rho,1)) = f(D)$ y por tanto $\rho = \rho'$.

Veamos el recíproco. Supongamos que f es una función inyectiva que conserva la razón doble. Sean $A, B, C \in r$ tres puntos diferentes. Por ser f inyectiva, sus imágenes respectivas también serán puntos diferentes de s. Sea $g: r \to s$ la única proyectividad tal que $g(A) = f(A)$, $g(B) = f(B)$ y $g(C) = f(C)$.
Queremos ver que $f = g$. Para ello tomamos cualquier punto $D \in r$ y demostraremos que $f(D) = g(D)$.
En la primera parte de esta demostración hemos dejado demostrado que, por ser g una proyectividad, conservará la razón doble:

$$[A,B;C,D] = [g(A), g(B); g(C), g(D)] = [f(A), f(B); f(C), g(D)]$$

y por hipótesis

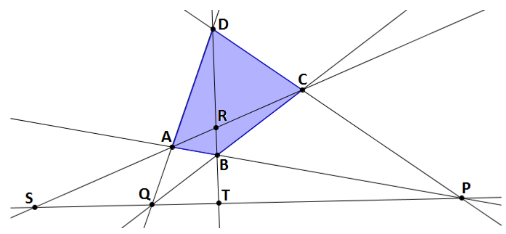
$$[A,B;C,D] = [f(A), f(B); f(C), f(D)]$$

por lo tanto

$$[f(A), f(B); f(C), g(D)] = [f(A), f(B); f(C), f(D)]$$

Luego, por el lema anterior, $f(D) = g(D)$.

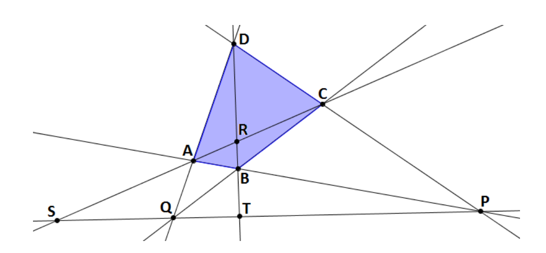
2.3.9 Corolario.
Dado un cuadriángulo completo (A,B,C,D), los puntos (S,T,Q,P) deducidos (ver 5.2.4)



forman una cuaterna armónica: $[S,T;Q,P]=-1$.

Demostración.
$(S,T,Q,P)\overset{D}{\underset{=}{\wedge}}(S,R,A,C)\overset{B}{\underset{=}{\wedge}}(S,T,P,Q)$, luego $[S,T;Q,P]=[S,T;P,Q]=\dfrac{1}{[S,T;Q,P]}$, y por tanto $[S,T;Q,P]^2=1\Rightarrow[S,T;Q,P]=\pm1$. Puesto que $Q\neq P$ sólo queda la posibilidad $[S,T;Q,P]=-1$.

2.3.10 Proposición. Conjugados armónicos expresados en coordenadas proyectivas.
Sea un cuadriángulo completo (A,B,C,D) en el que tomamos la referencia proyectiva $(P,Q,D;B)$. Entonces $T=P+Q$ y $S=P-Q$.
En general, si $T=\alpha P+\beta Q$, entonces $S=\alpha P-\beta Q$.



Demostración.
$T\in DB\Rightarrow T=\alpha D-\beta B=\alpha D-\beta(P+Q+D)=\alpha D-\beta P-\beta Q-\beta D=$
$=(\alpha-\beta)D-\beta P-\beta Q$
Pero $T\in PQ\Rightarrow\alpha-\beta=0\Rightarrow T=-\beta P-\beta Q=-\beta(P+Q)=P+Q$
(las coordenadas proyectivas se pueden multiplicar por cualquier constante).

De la misma manera se demuestra que $C=D+P$ y $A=D+Q$, de donde
$C-A=D+P-(D+Q)=D+P-D-Q=P-Q\in PQ$
Pero $C-A\in AC$, luego $P-Q=AC\cap PQ=S$.

En general, sea $T=\alpha P+\beta Q$. Sea $B=D+\lambda T$.
Luego $B=D+\lambda(\alpha P+\beta Q)=D+\lambda\alpha P+\lambda\beta Q$.
Y por tanto $B-\lambda\alpha P=D+\lambda\beta Q$.
$$\left.\begin{matrix}B-\lambda\alpha P\in BP\\ D+\lambda\beta Q\in DQ\end{matrix}\right\}\Rightarrow B-\lambda\alpha P=D+\lambda\beta Q=BP\cap DQ=A$$
Y de la misma forma, $B-\lambda\beta Q=D+\lambda\alpha P$
$$\left.\begin{matrix}B-\lambda\beta Q\in BQ\\ D+\lambda\alpha P\in DP\end{matrix}\right\}\Rightarrow B-\lambda\beta Q=D+\lambda\alpha P=BQ\cap DP=C$$
Y por último,
$C-A=B-\lambda\beta Q-(B-\lambda\alpha P)=B-\lambda\beta Q-B+\lambda\alpha P=$
$-\lambda\beta Q+\lambda\alpha P=\lambda(\alpha P-\beta Q)=\alpha P-\beta Q$

2.3.11 Lema.

Si $\vec{a}=(a_0,a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_0,b_1,b_2)$ y $\vec{c}=(c_0,c_1,c_2)$ son tres vectores linealmente dependientes, entonces

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}(c_0,c_1,c_2)=\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}(a_0,a_1,a_2)+\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}(b_0,b_1,b_2)$$

Demostración. Es un ejercicio simple de álgebra:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}(c_0,c_1,c_2)=\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}(a_0,a_1,a_2)+\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}(b_0,b_1,b_2)\Leftrightarrow$$

$$a_0b_1c_0+a_0b_1c_1+a_0b_1c_2-a_1b_0c_0+a_1b_0c_1+a_1b_0c_2=$$
$$=c_0b_1a_0+c_0b_1a_1+c_0b_1a_2-c_1b_0a_0-c_1b_0a_1-d_1b_0a_2+$$
$$+a_0c_1b_0+a_0c_1b_1+a_0c_1b_2-a_1c_0b_0-a_1c_0b_1-a_1c_0b_2$$

Simplificando y reorganizando los términos llegamos a

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}c_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}c_0+\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}c_1$$

que es equivalente al desarrollo por la tercera columna del determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

que es igual a 0 por hipótesis.

2.3.12 Proposición.

Sean cuatro puntos alineados $A=(a_0,a_1,a_2)$, $B=(b_0,b_1,b_2)$, $C=(c_0,c_1,c_2)$, y $D=(d_0,d_1,d_2)$ de modo que la recta que los contiene no pasa por (0,0,1). Entonces

$$[A,B;C,D]=\frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}$$

(Obviamente, se obtienen resultados simétricos si se supone que (1,0,0) o (0,1,0) no están en la recta).

Demostración.

Para determinar la única parametrización φ de la recta ABCD que manda (0,1), (1,0) y (1,1) respectivamente a A, B y C, escribiremos C como combinación lineal de A y B:

El punto C pertenece a la recta AB, luego, por el lema anterior,

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}(c_0,c_1,c_2)=\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}(a_0,a_1,a_2)+\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}(b_0,b_1,b_2)$$

Pero

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

pues por hipótesis los puntos no están alineados con (0,0,1)

Luego podemos dividir por el determinante y obtener

$$(c_0, c_1, c_2) = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} (a_0, a_1, a_2) + \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} (b_0, b_1, b_2)$$

$$\text{Sea } \alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}} \text{ y } \beta = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

Ahora volvemos a hacer el mismo proceso para escribir el vector (d_0, d_1, d_2) como combinación lineal de $\alpha(a_0, a_1, a_2)$ y de $\beta(b_0, b_1, b_2)$:

$$(d_0, d_1, d_2) = \frac{\begin{vmatrix} d_0 & \beta b_0 \\ d_1 & \beta b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha a_0 & \beta b_0 \\ \alpha a_1 & \beta b_1 \end{vmatrix}} (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2) + \frac{\begin{vmatrix} \alpha a_0 & d_0 \\ \alpha a_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha a_0 & \beta b_0 \\ \alpha a_1 & \beta b_1 \end{vmatrix}} (\beta b_0, \beta b_1, \beta b_2)$$

Luego tendrá por coordenadas, después de simplificar los denominadores

$$(d_0, d_1, d_2) = \begin{vmatrix} d_0 & \beta b_0 \\ d_1 & \beta b_1 \end{vmatrix} (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2) + \begin{vmatrix} \alpha a_0 & d_0 \\ \alpha a_1 & d_1 \end{vmatrix} (\beta b_0, \beta b_1, \beta b_2)$$

Luego, por definición de razón doble:

$$(d_0, d_1, d_2) = \frac{\begin{vmatrix} d_0 & \beta b_0 \\ d_1 & \beta b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha a_0 & d_0 \\ \alpha a_1 & d_1 \end{vmatrix}} = \frac{\beta \begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\alpha \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}$$

Tal y como queríamos ver.

2.3.13 Proposición.

Sea {A, B, C} una referencia proyectiva de una recta. $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (c_1, c_2)$ y $X = (x_1, x_2)$, y por tanto

$$(A,B;C,X)=\frac{\begin{vmatrix}1 & c_1\\0 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & x_1\\1 & x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_1\\0 & x_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & c_1\\1 & c_2\end{vmatrix}}=\frac{c_2(-x_1)}{x_2(-c_1)}=\frac{c_2\,x_1}{c_1\,x_2}$$

Luego

$$(A,B;C,A)=\frac{c_2\,1}{c_1\,0}\ \text{no definido ("}\infty\text{")}$$

$$(A,B;C,B)=\frac{c_2\,0}{c_1\,1}=0$$

$$(A,B;C,C)=\frac{c_2\,c_1}{c_1\,c_2}=1$$

2.3.14 Proposición. Cambio de escala proyectiva.
Sea A, B, C una escala proyectiva de una recta, y sea x la abscisa de un punto X en la escala anterior.
Sean A', B' y C' son otros tres puntos de la misma recta, sea x' la abscisa del punto X para esta nueva referencia.

Entonces, si las abscisas respectivas de A', B' y C' respecto a la escala proyectiva A, B, C son α, β y γ

$$x'=(A',B';C',X)=\frac{(\gamma-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

2.3.15 Proposición. Razón doble mediante determinantes 3x3.
Sean a, b, c, d cuatro puntos colineales en el plano proyectivo $P_2(IR)$, y sea o un punto fuera de la recta. Entonces

$$(a,b;c,d)=\frac{[o,a,c][o,b,d]}{[o,a,d][o,b,c]}$$

Demostración.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a=(1,0,0)$, $b=(0,1,0)$ y $o=(0,0,1)$.
Luego $c=(c_1,c_2,0)$ y $d=(d_1,d_2,0)$ para ciertos $c_1,c_2,d_1,d_2\in IR$.
Para la referencia de los puntos a y b, tendremos $a=(1,0)$, $b=(0,1)$, $c=(c_1,c_2)$ y $d=(d_1,d_2)$, luego

$$(a,b;c,d)=\frac{[a,c][b,d]}{[a,d][b,c]}=\frac{\begin{vmatrix}1 & c_1\\0 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & d_1\\1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & d_1\\0 & d_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & c_1\\1 & c_2\end{vmatrix}}=\frac{c_2\ (-d_1)}{d_2\ (-c_1)}=\frac{c_2\ d_1}{d_2\ c_1}$$

Por otro lado,

$$\frac{[o,a,c][o,b,d]}{[o,a,d][o,b,c]} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & d_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{c_2\ (-d_1)}{d_2\ (-c_1)} = \frac{c_2\ d_1}{d_2\ c_1} = (a,b;c,d)$$

2.3.16 Definición. Transformación armónica.
Denominamos transformación armónica a toda función en el plano proyectivo $f: P_2(IR) \to P_2(IR)$ que transforme puntos separados armónicamente en puntos separados armónicamente, es decir, si A, B, C y D son cuatro puntos alineados,

$$(A,B;C,D) = -1 \Rightarrow (f(A), f(B); f(C), f(D)) = -1$$

2.3.17 Corolario.
Toda transformación armónica es una colineación.

Demostración.
Sea $f: P^2(IR) \to P^2(IR)$ una transformación armónica y supongamos que A, B y C son tres puntos alineados. Sea D su cuarto armónico. Entonces $-1 = (A,B;C,D) = (f(A), f(B); f(C), f(D))$, luego $f(A), f(B); f(C), f(D)$ están alineados, y por tanto en particular $f(A), f(B); f(C)$ están alineados.

2.3.18 Proposición.
Toda colineación $f: P_2(IR) \to P_2(IR)$ es una transformación armónica.

Demostración.
Sean A, B, C, D cuatro puntos alineados en $P(IR^2)$ tales que $(A,B;C,D) = -1$.
Por ???? existirán cuatro puntos auxiliares fuera de la recta que determinarán una figura ????. Luego mediante la colineación f se transformarán en una configuración ???? de la que deduciremos que $(f(A), f(B); f(C), f(D)) = -1$, es decir, es una transformación armónica.

2.3.19 Corolario.
Toda colineación $f: P_2(IR) \to P_2(IR)$ es una homografía.

Demostración.
Sea $f: P_2(IR) \to P_2(IR)$ una colineación. La referencia proyectiva $0,1,\infty_x,\infty_y$ se transformará en una referencia proyectiva $0',1',\infty'_x,\infty'_y$.
Por ???? sabemos que existirá una homografía $g: P_2(IR) \to P_2(IR)$ tal que $g(0') = 0, g(1') = 1, g(\infty'_x) = \infty_x, g(\infty'_y) = \infty_y$.
Toda homografía es una colineación por ????, luego la composición $h = g \circ f$ será una colineación $h: P_2(IR) \to P_2(IR)$ tal que $h(0) = 0, h(1) = 1, h(\infty_x) = \infty_x, h(\infty_y) = \infty_y$.

Por el lema ???? la función $h: P_2(IR) \rightarrow P_2(IR)$ inducirá un automorfismo $IR \rightarrow IR$ que por ???? sólo podrá ser la identidad.

Por las observaciones anteriores ????, todos los puntos de l_x y l_y serán invariantes por h, y por lo tanto todos los puntos de $P_2(IR)$ que no pertenecen a l_∞ serán invariantes. Pero también lo serán los que están en l_∞, pues se pueden representar como la intersección de l_∞ y una recta que pasa por dos puntos fuera de l_∞. Es decir, la función h será la identidad, y por tanto $f = g^{-1}$ será la inversa de una homografía y por tanto una homografía.

Observación.
Esta demostración se ha basado en el hecho de que el único automorfismo de IR es la identidad. Esto no sucede para otros cuerpos, como por ejemplo C.

2.4 Homografías.

2.4.1 Definición. Homografía.

Una homografía es una aplicación el plano en sí mismo de la forma

$$f : P_2(IR) \to P_2(IR)$$
$$[v] \mapsto [M\,v]$$

donde M es una matriz 3×3 invertible.

Esta aplicación está bien construida, pues no depende del representante del punto:
$[v]=[w] \Leftrightarrow v=\lambda w \Rightarrow f(v)=Mv=M(\lambda w)=\lambda Mw=\lambda f(w) \Rightarrow$
$[f(v)]=[\lambda f(w)]=[f(w)]$

Dicho de otro modo, las homografías son las proyectividades de un plano proyectivo en sí mismo.

Definimos pues el grupo de homografías de $P_2(IR)$, como

$$\Pr(2)=\{f_A : P_2(IR) \to P_2(IR) \mid A \in GL(3)\}$$

Tenemos una aplicación

$$\sigma : GL(3) \to \Pr(2)$$
$$M \mapsto f_M$$

Que no es inyectiva: Si $N=\lambda M, \lambda \neq 0$, entonces

$$f_N([v])=[Nv]=[\lambda Mv]=[Mv]=f_M([v]) \Rightarrow f_N=f_M$$

Pero si es un morfismo: $\sigma(I)=Id$, $\sigma(MN)=f_M \circ f_N$

2.4.2 Proposición.

Todas las homografías son colineaciones, es decir, pasan puntos alineados a puntos alineados.
Observación. Más adelante veremos que también se cumple el recíproco: Toda colineación de $P_2(IR)$ es una homografía.

Demostración.
Sea la homografía $[v] \mapsto [Mv]$ para cierta matriz invertible M.
Sean A, B, C tres puntos colineales del plano proyectivo. Es decir, existirá una recta r tal que $A,B,C \in r$. Dicho de otro modo, existirá un vector v , $r=[v]$, tal que.
Consideremos la recta s determinada por el vector $w=\left(M^{-1}\right)^{\perp} v$. Veamos que esta recta pasa por los tres puntos $f(A)$, $f(B)$ y $f(C)$:

$$\langle w, f(A)\rangle = \left\langle \left(M^{-1}\right)^{\perp} v, M\,A \right\rangle = \left(\left(M^{-1}\right)^{\perp} v\right)^{\perp} M\,A = v^{\perp}\left(\left(M^{-1}\right)^{\perp}\right)^{\perp} M\,A =$$
$$v^{\perp}\left(M^{-1}\right) M\,A = v^{\perp} A = \langle v, A\rangle = 0$$

y el mismo argumento se aplica a $f(B)$ y $f(C)$.

Observación. Esta demostración indica que las rectas, al someterse a una homografía M, se transformarán de la forma

$$v \mapsto \left(M^{-1}\right)^{\perp} v$$

para conservar así la colinealidad de puntos.

2.4.3 Proposición. Teorema fundamental.
Dados dos cuadriángulos P_0, P_1, P_2, P_3 y Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 de $P_2(IR)$ (ver 5.2.4), existirá una matriz invertible 3x3 M para la cual $f = f_M$, y $f(P_i) = Q_i$ $i = 0, 1, 2, 3$.
Es decir, existirá una homografía que envía P_0, P_1, P_2, P_3 a Q_0, Q_1, Q_2, Q_3. Además, esta homografía es única proyectivamente, es decir salvo homotecia:
Si $f = f_M$ y $g = g_N$ cumplen $f(P_i) = g(P_i) = Q_i$ $i = 0, 1, 2, 3$, entonces $N = \lambda M$ para cierto $\lambda \neq 0$.

Demostración.
En primer lugar, vamos a suponer que $P_0 = (1,0,0)$, $P_1 = (0,1,0)$, $P_2 = (0,0,1)$ y $P_3 = (1,1,1)$. En esta referencia, $Q_0 = (a_1, a_2, a_3)$, $Q_1 = (b_1, b_2, b_3)$, $Q_2 = (c_1, c_2, c_3)$, y $Q_3 = (d_1, d_2, d_3)$ donde $(d_1, d_2, d_3) = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(b_1, b_2, b_3) + \gamma(c_1, c_2, c_3)$.
Ninguno de estos escalares α, β, γ puede ser nulo, pues en ese caso tendríamos a Q_3 en alguna recta $Q_i Q_j$.
Tomando la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \beta b_1 & \gamma c_1 \\ \alpha a_2 & \beta b_2 & \gamma c_2 \\ \alpha a_3 & \beta b_3 & \gamma c_3 \end{pmatrix}$$

Cumple las condiciones exigidas. Esta matriz cumple $\det M \neq 0$ porque los tres puntos Q_0, Q_1, Q_2 no están alineados.

Para el caso general, basta tomar en primer lugar la matriz M_1 que envía que $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,1,1)$ a P_0, P_1, P_2, P_3, y la matriz M_2 que envía $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,1,1)$ a Q_0, Q_1, Q_2, Q_3. La matriz deseada es $M_2 \cdot M_1^{-1}$.

Unicidad:
Supongamos que tenemos una homografía $f = f_M$ tal que $f(P_i) = P_i$, $i = 0,1,2,3$ para $P_0 = (1,0,0)$, $P_1 = (0,1,0)$, $P_2 = (0,0,1)$ y $P_3 = (1,1,1)$.

Si escribimos $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, entonces $f(P_0) = P_0$ implica

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = \lambda_0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$$

De la misma forma, aplicando $f(P_1)=P_1$ y $f(P_2)=P_2$ llegamos a la conclusión de que M tendrá la forma diagonal

$M=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ para ciertos tres escalares $\lambda_i \neq 0$. Pero también $f(P_3)=P_3$, luego

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\Rightarrow \lambda=\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2$$, es decir $M=\lambda\, Id$.

En el caso general, supongamos que tenemos dos homografías $f = f_M$ y $g = g_N$ cumplen $f(P_i)=g(P_i)=Q_i \; i=0,1,2,3$. Entonces $f\circ g^{-1}(Q_i)=Q_i$ y por tanto, por el resultado anterior, $f\circ g^{-1}=\sigma(MN^{-1})\Rightarrow MN^{-1}=\lambda\, Id \Rightarrow M=\lambda N$.

2.4.4 Definición. Puntos y rectas fijas o dobles.

Se llama punto doble de una homografía al que coincide con su imagen: $f(P)=P$

Y recta doble la que coincide con su homóloga: $f(r)=r$.

Diremos que r es una **recta de puntos dobles** cuando todos sus puntos sean dobles. Toda recta de puntos dobles es una recta doble, pero no toda recta doble es de puntos dobles.

2.4.5 Proposición.

Si r, s son dos rectas dobles distintas, entonces su punto de intersección $O=r\cap s$ será un punto doble:

$$\left.\begin{array}{l} O\in r\Rightarrow f(O)\in f(r)=r\\ O\in s\Rightarrow f(O)\in f(s)=s\end{array}\right\}\Rightarrow f(O)\in r\cap s=\{O\}\Rightarrow f(O)=O$$

Además, se da la situación dual, es decir, toda recta determinada por dos puntos dobles es doble:

$$r=PQ,\ f(P)=P,\ f(Q)=Q\Rightarrow X\in PQ\Rightarrow f(X)\in f(P)f(Q)=PQ$$

donde hemos aprovechado la propiedad de que todas las homografías son colineaciones (2.4.2).

2.4.6 Lema.

Un punto P es doble si y sólo si es un autovector del isomorfismo asociado a la homografía.

Luego para encontrar los puntos fijos de una homografía debemos resolver la ecuación

$$Det(M-\lambda I)=0$$

Esta ecuación en λ se llama **polinomio característico** y es de tercer grado.

Para cada raíz real λ_i se busca el rango de la matriz $M-\lambda_i I$, si éste es igual a 2, a λ_i corresponde un solo punto doble; si es igual a 1, le corresponde una recta de puntos dobles; y si es igual a cero, la homografía es la identidad.

2.4.7 Lema.

Toda homografía en el plano proyectivo real tiene por lo menos un punto fijo.

Demostración.
Supongamos que $f=[M]$ para cierta matriz M invertible.
Los puntos fijos de f se corresponden con los valores propios de la matriz M, y éstos vienen dados por la ecuación $Det(M-\lambda I)=0$
Es una ecuación polinómica real de tercer grado, luego tendrá al menos una solución real.
Esta solución no puede ser $\lambda=0$, pues en este caso $Det(M)=0$ contradiciendo la hipótesis de que M es invertible.

2.4.8 Proposición. Clasificación de las homografías en el plano. (Fuente: Angel Montesdeoca)
Vamos a detallar una clasificación de las homografías del plano real en función de sus puntos fijos (es decir, de los autovalores del isomorfismo asociado).

I	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ simples $rango(A-\lambda_i I)=2 \quad i=1,2,3$	**Homografía con tres únicos puntos dobles**
II	λ_1 simple y λ_2, λ_3 imag. conjugadas $rango(A-\lambda_1 I)=2$	**Homografía con un solo punto doble y una sola recta doble no incidentes**
III	λ_1 doble y λ_2 simple $rango(A-\lambda_1 I)=2$ y $rango(A-\lambda_2 I)=2$	**Homografía con dos puntos dobles y dos rectas dobles**
IV	λ_1 simple y λ_2 doble $rango(A-\lambda_1 I)=2$ y $rango(A-\lambda_2 I)=1$	**Homografía con un punto doble y una recta de puntos dobles que no inciden (homología)**
V	λ_1 triple $rango(A-\lambda_1 I)=2$	**Homografía con un solo punto doble y una sola recta doble incidentes**
VI	λ_1 triple $rango(A-\lambda_1 I)=1$	**Homografía con un punto doble y una recta de puntos dobles que inciden (homología especial)**
VII	λ_1 triple $rango(A-\lambda_1 I)=0$	**Identidad**

I. Homografía con tres únicos puntos dobles.
Corresponde al caso en que las tres raíces del polinomio característico son reales y distintas.
Obtenemos tres puntos dobles y tres rectas dobles formando un triángulo. Si tomamos los puntos dobles como vértices de un triángulo de referencia de un sistema de coordenadas proyectivas, la ecuación de la homografía toma la forma:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

II. Homografía con un solo punto doble y una sola recta doble no incidentes.
Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una sola raíz simple real y dos imaginarias conjugadas. La homografía recibe el nombre de **torsión proyectiva**, el punto doble, **centro** y la recta doble, **eje**.
Tomando el punto doble como punto (1,0,0) y la recta doble como $x_0=0$, la ecuación de la homografía resulta ser:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^1 & a_2^1 \\ 0 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

III. Homografía con dos puntos dobles y dos rectas dobles.

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raíz simple y una raíz doble, para las cuales el rango de $A-\lambda I$ es 2.

Las rectas dobles son: la que une los puntos dobles, más otra recta que pasa por el punto doble correspondiente a la raíz doble.

Tomando los puntos dobles como puntos (0,0,1) y (1,0,0) del sistema de coordenadas y las rectas dobles como las rectas $x_2 = 0$ y $x_1 = 0$, la homografía se expresa por:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1^0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

IV. Homografía con un punto doble y una recta de puntos dobles que no inciden (homología).

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raíz doble para la cual el rango de la matriz $A-\lambda I$ es 1.

La homografía recibe el nombre en este caso de **homología**, el punto correspondiente a la raíz simple se llama **centro de homología** y la recta de puntos dobles se llama **eje de homología**.

Tomando como coordenadas el centro (1,0,0) y el eje de homología como la recta $x_0 = 0$, las ecuaciones quedan entonces:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

V. Homografía con un solo punto doble y una sola recta doble incidentes.

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raíz triple, para la cual el rango de la matriz $A-\lambda I$ es 2.

Tomando como punto doble el (1,0,0) y la recta doble la $x_2 = 0$, las ecuaciones de la homografía quedan:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1^0 & a_2^0 \\ 0 & \lambda_1 & a_2^1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

VI. Homografía con un punto doble y una recta de puntos dobles que inciden (homología especial).

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raíz triple λ_1, para la cual el rango $A-\lambda I$ es igual a 1. En este caso el centro de homología está en el eje y se conoce como **homología especial**.

Tomando el centro como el punto (1,0,0) y el eje como la recta $x_2 = 0$, las ecuaciones de la homología especial son

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a_2^0 \\ 0 & \lambda_1 & a_2^1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Las homologías con el mismo centro y eje forman grupo.

VII. Identidad.

Corresponde al caso en que el polinomio característico tiene una raíz triple λ_1, para la cual el rango de la matriz $A-\lambda I$ es cero. Sus ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Las homografías con un mismo triángulo doble forman un subgrupo del grupo lineal proyectivo $PGL(2, IR)$.

2.5 Homologías.

2.5.1 Definición. Homografía central. Centro de una homografía.

De una homografía $f: P^2(IR) \to P^2(IR)$ se dirá que es central si existe un punto $C \in P^2(IR)$ tal que cada recta por C es doble, esto es, $X \neq C$ implica $f(CX) = CX$. A un punto C con tal propiedad se le conoce como centro de la homografía. En particular, basta considerar dos rectas diferentes por el centro para concluir con que el propio centro es un punto doble (2.3.6).

2.5.2 Proposición.

Para toda homografía $f: P_2(IR) \to P_2(IR)$ se satisfacen las siguientes propiedades:
a) Si hay en $P_2(IR)$ dos rectas distintas de puntos dobles, entonces f es la identidad.
b) Si C es un centro de f , entonces C es doble.
c) f es la identidad si tiene dos centros distintos.
d) Si f es central con centro C y r es una recta doble que no pasa por C, entonces todo punto de r es doble.

Demostración.
a) Tómense dos puntos diferentes en $r - s$ y otros dos puntos diferentes en $s - r$. La elección de estos cuatro puntos garantiza que forman un símplex en el cual la función f es la identidad, y por el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva se cumplirá que $f = Id$. Eso sí, para que este razonamiento funcione es preciso contar con al menos tres puntos en cada recta. Por otro lado, que haya al menos tres puntos en cada recta proyectiva sobre un cuerpo K equivale a afirmar la existencia de al menos dos escalares en el cuerpo K. Pero en cada cuerpo hay al menos dos elementos, el 0 y el 1, lo que acaba de probar a).
b) Está demostrado en 2.3.6.
c) Supongamos que la homografía tiene dos centros distintos C_1 y C_2 . Luego por b) serán puntos dobles. Y para cualquier punto $X \in P_2(IR), X \neq C_1, C_2$, las rectas C_1X y C_2X son rectas dobles, luego X será un punto doble por 2.3.6, es decir, $f(X) = X$.
d) Si $X \in r$, $X \in r \cap XC$ intersección de dos rectas dobles, luego será un punto doble por 2.3.6.

2.5.3 Definición. Homología.

Una homología es una homografía central distinta de la identidad.

Observación: El apartado c) nos indica que una homología tendrá un único punto central.

2.5.4 Proposición. Eje de una homología.

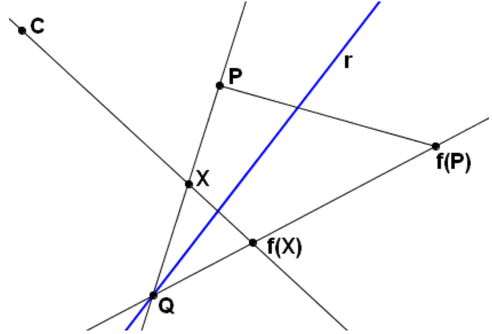
Toda homología tiene una única recta de puntos fijos. Esta recta de denominará “eje de la homología”.
Observación: Esta proposición es la dual de la observación de 2.3.9.

Demostración.
Por definición, existirá un punto X tal que $Y = f(X) \neq X$. Luego $X \neq C$, pues $f(C) = C$.

La recta CX es doble, luego $Y = f(X) \in CX$.
Consideremos ahora una recta $r \neq CX$ que pase por X. Tenemos que $f(r) \neq r$ pues en caso contrario $X = CX \cap r$ sería un punto doble (2.3.6).
Veamos que $A = r \cap f(r)$ es un punto doble. En efecto, $A \neq C$ entonces $r = AX = CX$ sería una recta doble. Luego $A = CA \cap r$, luego $f(A) \in CA$ por ser CA doble y $f(A) \in f(r)$, pero $CA \cap f(r) = A$ pues
$A = r \cap f(r) \wedge A = CA \cap r \Rightarrow A = CA \cap f(r)$, luego
$f(A) \in CA \cap f(r) = \{A\} \Rightarrow f(A) = A$ es decir, es un punto doble.
Por cada punto del plano proyectivo pasan al menos tres rectas diferentes, luego podemos considerar una recta s que pasa por A con $s \neq r$ y $s \neq CA$.
Y repitiendo el razonamiento anterior se llega a que $B = s \cap f(s)$ es un punto doble.
Puesto que $A \neq B$ (¿por qué?), tenemos una recta AB determinada por dos puntos dobles, luego es una recta doble.
Por último, o bien $C \notin AB$, y por tanto 2.3.8(d) garantiza que la recta AB sea de puntos dobles, o bien $C \in AB$, y por tanto en la recta AB tenemos tres puntos dobles. La restricción de f a la recta AB será una proyectividad que deja fijos estos tres puntos, luego, por el Teorema Fundamental de la Geometría proyectiva, la función f será la identidad en la recta AB, es decir, que la recta AB será una recta de puntos fijos de la función. La unicidad del eje queda asegurada por 2.3.8(a).

2.5.5 Proposición.
Una homología f queda determinada por su centro C, su eje central r y un par de puntos homólogos P y $f(P)$ con $P \neq C, P \notin r$.

Demostración.
Sea un punto cualquiera $X \notin CP$. Localizamos el punto $Q = XP \cap r$. Por un lado, $f(X) \in CX$ por ser CX una recta doble, y por otro
$X \in QP \Rightarrow f(X) \in f(QP) = f(Q)f(P) = Qf(P)$ por ser Q un punto doble, luego $f(X) = CX \cap Qf(P)$.



Si $X \in CP$, tomando un punto auxiliar $P' \notin CP$, podemos determinar su imagen $f(P')$ aplicando la primera parte de esta demostración, y con esta imagen podemos calcular $f(X')$ con los puntos P' y $f(P')$ nuevamente aplicando la primera parte puesto que $X \notin CP'$.

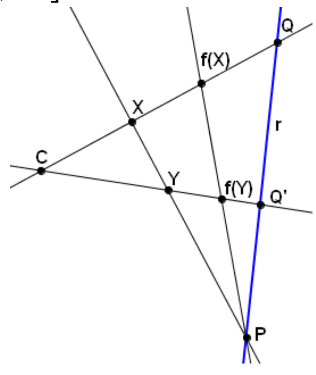
2.5.6 Definición. Homología general.
Una homología general es una homología cuyo centro C queda fuera de su eje central r.

2.5.7 Proposición. Razón de una homología general.
Dada una homología general de centro C y eje central r, y dado cualquier punto $X \notin r$, $X \neq C$, definiendo $Q = r \cap CX$, la razón doble

$$\lambda = [C, Q; X, f(X)]$$

no depende del punto X escogido. A λ le diremos razón de la homología general, y hablaremos pues de una homología general de centro C, eje r y razón λ.

Demostración.
Sea un punto X, y $Q = CX \cap r$.
Sea $Y \notin CX$, y $Q' = CY \cap r$.
Sea $P = XY \cap r$. Entonces $Y \in XY = XP \Rightarrow f(Y) \in f(X) f(P) = f(X)P$.
Por otro lado $Y \in CY \Rightarrow f(Y) \in CY = CQ'$.
Luego la perspectiva por P de la recta CQ' en CQ envía los puntos $C, Y, f(Y), Q'$ a $C, X, f(X), Q$, y puesto que toda perspectiva conserva la razón doble,
$\lambda = [C, X; f(X), Q] = [C, Y; f(Y), Q']$ es invariante.



2.5.8 Proposición.
Dos homologías generales con el mismo eje conmutan si y sólo si tienen el mismo centro.

Demostración.

2.5.9 Definición. Homología especial.
Una homología especial es una homología cuyo centro C pertenece a su eje central r.

2.6 Involuciones.

2.6.1 Definición. Involución.
Una involución es una homografía f distinta de la identidad tal que $f \circ f = Id$, o equivalentemente $f = f^{-1}$.

2.6.2 Proposición.
Las homologías involutivas son, exactamente, las de razón –1.

2.7 Proyectividades entre rectas.

2.7.1 Proposición. Proyectividades entre dos rectas.
Sea $f : r \to s$ una función entre dos rectas proyectivas. Entonces son equivalentes:
a) Existe una parametrización $\psi : P_1(IR) \to r$ tal que $f \circ \psi$ es una parametrización de s.
b) Para cada parametrización $\psi : P_1(IR) \to r$ se tiene que $f \circ \psi$ es una parametrización de s.
c) Para cada parametrización $\psi : P_1(IR) \to r$ y cada parametrización $\varphi : P_1(IR) \to s$, se tiene que $\varphi^{-1} \circ f \circ \psi$ es un cambio de variable en $P_1(IR)$.
d) Existen parametrizaciones $\psi : P_1(IR) \to r$ y $\varphi : P_1(IR) \to s$ tales que $\varphi^{-1} \circ f \circ \psi$ es un cambio de variable en $P_1(IR)$.

Diremos que una función $f : r \to s$ es una **proyectividad** cuando cumpla cualquiera de las condiciones equivalentes anteriores.

Demostración.
$a) \Rightarrow b)$ Supongamos que existe una parametrización $\psi : P_1(IR) \to r$ tal que $f \circ \psi$ es una parametrización de s.
Sea $\psi' : P_1(IR) \to r$ cualquier otra parametrización de r. Por el lema 2.2.11, $\psi' = \psi \circ \gamma$ para un cierto cambio de variable γ. Luego $f \circ \psi' = f \circ (\psi \circ \gamma) = (f \circ \psi) \circ \gamma$ donde $f \circ \psi$ es una parametrización de s, luego, nuevamente por 2.2.11 será una parametrización de s.
$b) \Rightarrow c)$ $f \circ \psi$ es una parametrización de s, por hipótesis. Luego por 2.2.11, $f \circ \psi = \psi' \circ \gamma$ para cierto cambio de variable γ. Por consiguiente, $\psi'^{-1} \circ f \circ \psi = \gamma$ es un cambio de variable.
$c) \Rightarrow d)$ evidente.
$d) \Rightarrow a)$ Si $\varphi^{-1} \circ f \circ \psi$ es un cambio de variable, entonces $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \psi = f \circ \psi$ será una parametrización de s por el lema 2.2.11.

2.7.2 Teorema. Teorema fundamental.
Dadas dos rectas r y s, tres puntos distintos A, B y C en r y tres puntos distintos A', B' y C' en s, existe una única proyectividad $f : r \to s$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ y $f(C) = C'$.

Demostración.
Sea φ la única parametrización de r tal que $\varphi(1,0) = A$, $\varphi(0,1) = B$ y $\varphi(1,1) = C$. Sea φ' la única parametrización de s tal que $\varphi'(1,0) = A'$, $\varphi'(0,1) = B'$ y $\varphi'(1,1) = C'$. La existencia y unicidad de dichas parametrizaciones quedó demostrada en 2.2.8.
La función $f = \varphi' \circ \varphi^{-1} : r \to s$ satisface $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ y $f(C) = C'$ y además es una proyectividad, pues $f \circ \varphi = \varphi' \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi'$ es una parametrización de s y aplicamos 2.7.1(a).
Veamos que además es única. Si existiera otra proyectividad $g : r \to s$ tal que $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ y $g(C) = C'$, entonces utilizando la parametrización φ de r anterior, $f \circ \varphi$ y $g \circ \varphi$ serían parametrizaciones de s tales que

$g\circ\varphi(1,0)=f\circ\varphi(1,0)=A'$, $g\circ\varphi(0,1)=f\circ\varphi(0,1)=B'$ y $g\circ\varphi(1,1)=f\circ\varphi(1,1)=C'$, luego por la unicidad de 2.2.8, $g\circ\varphi=f\circ\varphi$, y por ser φ biyectiva, $g=f$.

2.7.3 Proposición.
Toda homografía subordina una proyectividad entre los elementos de dos rectas homólogas (o entre dos haces homólogos en el dual).

Demostración.
Tomando los sistemas de coordenadas de manera que las dos rectas correspondientes r y r' sean respectivamente $x=0$ y $x'=0$, las ecuaciones de la homografía resultan ser de la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La correspondencia entre los puntos de la recta r, cuyas coordenadas son de la forma $(0,y,z)$, y los de la recta r', cuyas coordenadas son $(0,y',z')$, está dada por la transformación

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es distinto de cero; se trata pues de una proyectividad entre r y r.
Para haces, basta cortar por rectas homólogas y reducirlo al caso anterior.

2.7.4 Proposición. Proyección.
Sea r una recta de $P_2(IR)$ y O un punto que no está en r. Sea $\Omega(O)\subset P_2^*(IR)$ el haz de rectas que pasan por O. Entonces la aplicación $r\to\Omega(O)$ que asocia a cada punto P de r la recta OP es una proyectividad, que recibe el nombre común de **proyección**.

Demostración.
Sea
$\psi: P_1(IR)\to r$
$(\alpha,\beta)\mapsto(a_1\alpha+b_1\beta, a_2\alpha+b_2\beta, a_3\alpha+b_3\beta)$
una parametrización de la recta r.
Supongamos que el punto O tiene por coordenadas $O=(O_1,O_2,O_3)$.
La recta OP tendrá como ecuación

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ O_1 & O_2 & O_3 \\ a_1\alpha+b_1\beta & a_2\alpha+b_2\beta & a_3\alpha+b_3\beta \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\begin{vmatrix} O_2 & O_3 \\ a_2\alpha+b_2\beta & a_3\alpha+b_3\beta \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} O_1 & O_3 \\ a_1\alpha+b_1\beta & a_3\alpha+b_3\beta \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} O_1 & O_2 \\ a_1\alpha+b_1\beta & a_2\alpha+b_2\beta \end{vmatrix}\right)$$

Cada una de las componentes del vector anterior es combinación lineal de α y β.
Veamos la primera (el resto se verifica de forma similar):

$$\begin{vmatrix} O_2 & O_3 \\ a_2\alpha + b_2\beta & a_3\alpha + b_3\beta \end{vmatrix} = O_2(a_3\alpha + b_3\beta) - O_3(a_2\alpha + b_2\beta) =$$
$$= O_2a_3\alpha + O_2b_3\beta - O_3a_2\alpha - O_3b_2\beta$$
$$= (O_2a_3 - O_3a_2)\alpha + (O_2b_3 - O_3b_2)\beta$$

Claramente es una biyección, luego por 2.5.1(a) se trata de una proyectividad.

2.7.5 Corolario. Sección.
Sea r una recta de $P_2(IR)$ y O un punto que no está en r. Sea $\Omega(O) \subset P_2^*(IR)$ el haz de rectas que pasan por O. Entonces la aplicación $\Omega(O) \to r$ que asocia a cada recta del haz su intersección con la recta r es una proyectividad, que recibe el nombre común de **sección**.

Demostración.
Es la función inversa de la proyectividad definida en 2.5.2, luego es una proyectividad.

2.7.6 Corolario. Perspectividad.
Sean r y s dos rectas del plano $P_2(IR)$, y fijamos un punto O exterior a ambas. Podemos definir una función $f: r \to s$ de la siguiente forma: Dado un punto $P \in r$, determinamos la recta OP y tomamos como $f(P)$ su punto de intersección con s, es decir:

$$\begin{aligned} f &: r \to s \\ P &\mapsto (OP) \cap s \end{aligned}$$

La función f definida de esta manera es una proyectividad, que recibe el nombre común de **perspectividad**. El punto O se llama **centro de la perspectividad**.

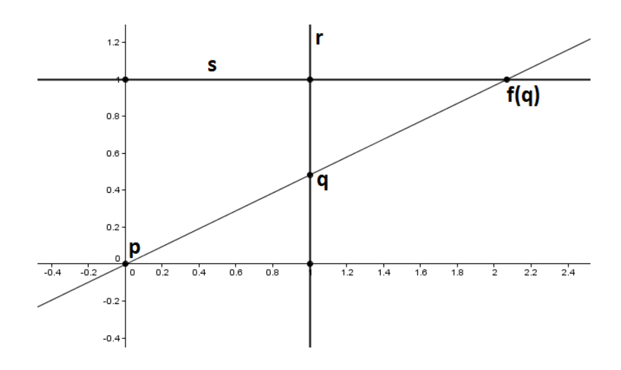
Notación: Escribiremos $r \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} s$

Demostración.
Es la composición de dos proyectividades (sección y proyección), luego es una proyectividad.

2.7.7 Observaciones.

Se evidencia que toda perspectividad es una biyección así como que el punto de intersección $r \cap s$ es el único punto doble de la misma (punto que se aplica en sí mismo).
Una propiedad elemental afirma que si $r = s$ entonces la perspectividad es la identidad, luego la identidad constituye una perspectividad de centro cualquier punto del plano que no se sitúe en la recta dominio. Otra obviedad proviene del hecho de que la inversa de una perspectividad es otra perspectividad del mismo centro.

2.7.8 Ejemplo.
Tomamos en IR^2 las rectas $r : x = 1$, $s : y = 1$ y el punto $P = (0,0)$



Parametrizamos las rectas de la siguiente manera: $r : \{(1, \alpha), \alpha \in R\}$, $s : \{(\beta, 1) , \beta \in R\}$

La recta $q \vee q$ tendrá por ecuación $y = \alpha\, x$ y su intersección con s será el punto $\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$

Pensando f como función entre los parámetros de las rectas tenemos $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

2.7.9 Ejemplo.
Sean $p = (1,3)$, $r = \{(2s+1, s+2) \mid s \in R\}$ y $s = \{(t-1, 2-t) \mid t \in R\}$. Queremos escribir la proyección f de r en s desde p como una función entre los parámetros correspondientes.

Solución.
Sea $q = (2s+1, s+2)$ un punto genérico de r.
La recta pq tendrá como vector director $\overrightarrow{pq} = q - p = (2s, s-1)$ luego tendrá asociada la ecuación

$$\frac{x-1}{2s} = \frac{y-3}{s-1}$$

Haciendo su intersección con la recta s tenemos el punto genérico
$$\frac{(t-1)-1}{2s} = \frac{(2-t)-3}{s-1} \Leftrightarrow (s-1)(t-2) = 2s(-1-t) \Leftrightarrow t = \frac{-2}{3s-1}$$

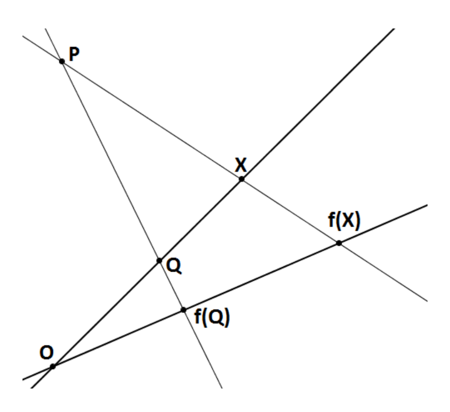
Así pues, la función deseada es $f(s) = \frac{-2}{3s-1}$.

Esta función no está definida para $s=\frac{1}{3}$ pues en este caso las rectas son paralelas.

2.7.10 Proposición.
Sean r y s dos rectas diferentes de $P_2(IR)$, sea $O=r\cap s$ y $f:r\to s$ una proyectividad. Entonces f es una perspectividad $\Leftrightarrow$ $f(O)=O$.

Demostración.
Una demostración sintética se encuentra en 5.7.5. Una demostración puramente analítica puede ser la siguiente:
Hay que demostrar que las rectas $X\vee f(X)$ son todas concurrentes en un cierto punto P, pues entonces tendremos que

$$\forall X\in r, \left.\begin{cases} f(X)\in s \\ f(X)\in X\vee f(X)=X\vee P \end{cases}\right\} \Rightarrow f(X)=s\cap\left(X\vee P\right)$$



Sea $O=[u]$, $f=[\varphi]$, entonces $\varphi(u)=\lambda u, \lambda\neq 0$, pues $f(O)=O$.
Sea $Q=[v]$, $w=\varphi(v)$, $Q'=f(Q)=[w]$
Sea $X\in r$, $X\neq O$. $X=[\alpha u+\beta v]$ para ciertos $\alpha,\beta\in K$. $\beta\neq 0$ pues $X\neq O$.

$$f(X)=[\varphi(\alpha u+\beta v)]=[\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)]=[\alpha\lambda u+\beta w]$$

Luego $X\vee f(X)=[\langle\alpha u+\beta v, \alpha\lambda u+\beta w\rangle]$

Puesto que $\beta\neq 0$ existirá $\frac{1}{\beta}$, y tomando $\frac{1}{\beta}\left(\lambda\left(\alpha u+\beta v\right)-\alpha\lambda u+\beta w\right)\in X\vee f(X)$

$$\frac{1}{\beta}\left(\lambda\alpha u+\lambda\beta v-\alpha\lambda u-\beta w\right)=\frac{\lambda\alpha}{\beta}u+\lambda v-\frac{\alpha\lambda}{\beta}u-w=\lambda v-w$$

No depende del punto X, luego tomando $P=[\lambda v-w]$ tenemos un punto que es común a todas las rectas $X\vee f(X)$.

2.7.11 Proposición. Ecuación explícita asociada a una función que conserva la razón doble.
Fijamos sendas referencias proyectivas $\{A,B;C\}$ y $\{A',B';C'\}$ de r y s respectivamente. Supongamos que $A'\neq\sigma(A)$.

Queremos establecer una relación entre la abscisa x de un punto $X \in r$ para la referencia proyectiva $\{A, B; C\}$ y la abscisa x' de su imagen $\sigma(X)$ para la referencia proyectiva $\{A', B'; C'\}$. Dicho de otra manera, se desea encontrar la ecuación de σ en términos de abscisas.

Para todo $X \neq A$ se cumple $x = (A, B; C, X) = (\sigma(A), \sigma(B); \sigma(C), \sigma(X))$

Sean α, β, γ las abscisas respectivas de $\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)$ en la referencia $\{A', B'; C'\}$.

Por 2.4.7 se cumple $(\sigma(A), \sigma(B); \sigma(C), \sigma(X)) = \dfrac{(\gamma - \alpha)(x' - \beta)}{(x' - \alpha)(\gamma - \beta)}$

Luego

$$x = \frac{(\gamma - \alpha)(x' - \beta)}{(x' - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

Ahora debemos aislar x'. Definiendo $\mu_0 = \alpha - \gamma$ y $\mu_1 = \gamma - \beta$,

$$x = \frac{-\mu_0 (x' - \beta)}{\mu_1 (x' - \alpha)} \Leftrightarrow \mu_1 (x' - \alpha) x = -\mu_0 (x' - \beta) \Leftrightarrow \mu_1 x' x - \mu_1 \alpha x = -\mu_0 x' + \mu_0 \beta$$

$$\Leftrightarrow \mu_1 x' x + \mu_0 x' = \mu_1 \alpha x + \mu_0 \beta \Leftrightarrow x' \left(\mu_1 x + \mu_0\right) = \mu_1 \alpha x + \mu_0 \beta$$

Es decir, una ecuación de la forma

$$x' \left(\mu_1 x + \mu_0\right) = \lambda_1 x + \lambda_0 \qquad \text{(Ecuación implícita de } \sigma \text{)}$$

en donde $\lambda_0 = \mu_0 \beta$, y $\lambda_1 = \mu_1 \alpha$

De esta ecuación podemos aislar la abscisa x':

$$x' = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x} \qquad \text{(Ecuación explícita de } \sigma \text{)}$$

Para todo x excepto para $\mu_0 + \mu_1 x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-\mu_0}{\mu_1} = \dfrac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}$

Luego se conviene, porque no hay otra posibilidad, en que el punto de r de abscisa $\dfrac{-\mu_0}{\mu_1}$ se aplica por σ en el punto del infinito de s.

Los vectores (μ_0, μ_1) y (λ_0, λ_1) han de ser independientes. En efecto, si fueran dependientes, $(\lambda_0, \lambda_1) = k(\mu_0, \mu_1) \Rightarrow \lambda_0 = k\mu_0, \lambda_1 = k\mu_1$ y de la ecuación explícita de σ deduciríamos que $x' = \dfrac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x} = \dfrac{k\mu_0 + k\mu_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x} = k \dfrac{\mu_0 + \mu_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x} = k$ constante, luego la

función σ no podría ser sobreyectiva contradiciendo la hipótesis de su biyectividad.
Así pues, $0 \neq \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{vmatrix} = \mu_0\lambda_1 - \mu_1\lambda_0$.

Resumiendo: Dada una biyección σ entre rectas proyectivas r y s sobre el mismo cuerpo K que conserve razones dobles, resulta factible encontrar una relación del tipo

$$x' = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x}$$

con cuatro escalares $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$ satisfaciendo $\mu_0\lambda_1 - \mu_1\lambda_0 \neq 0$, que proporciona la abscisa x' de la imagen por σ de cada punto de abscisa x, pero con la salvedad de que el punto impropio de r se transforma en el punto de abscisa $\frac{\lambda_1 x}{\mu_1 x}$ u el punto de abscisa $-\frac{\mu_0}{\mu_1}$ se aplica en el punto del infinito de s.

A la igualdad anterior se le denomina la ecuación explícita de σ. A las imágenes y originales de los respectivos puntos impropios de r y s se las conoce bajo el nombre de puntos límite.

2.7.12 Corolario.
Toda biyección $\sigma : r \to s$ entre dos rectas proyectivas sobre un mismo cuerpo K que conserva la razón doble es una proyectividad.

Demostración.
Supongamos que el punto X de r de coordenadas homogéneas (x_0, x_1) se aplica en el punto X' de s de coordenadas $(x_0^{'}, x_1^{'})$.
Puestos en el caso de que X no es el punto del infinito de r ni es un punto límite (X' no es el punto impropio de s), resulta lícito el paso a cartesianas haciendo

$$x = \frac{x_0}{x_1} \qquad x' = \frac{x_0^{'}}{x_1^{'}}$$

y sustituyendo en la ecuación explícita:

$$x' = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x} \Leftrightarrow \frac{x_0^{'}}{x_1^{'}} = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x} \Leftrightarrow x_0^{'}(\mu_0 + \mu_1 x) = x_1^{'}(\lambda_0 + \lambda_1 x)$$

$$\Leftrightarrow x_0^{'}\left(\mu_0 + \mu_1 \frac{x_0}{x_1}\right) = x_1^{'}\left(\lambda_0 + \lambda_1 \frac{x_0}{x_1}\right) \Leftrightarrow x_0^{'}(\mu_0 x_1 + \mu_1 x_0) = x_1^{'}(\lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^{'}}{x_1^{'}} = \frac{\lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_0}{\mu_0 x_1 + \mu_1 x_0}$$

Esta función se corresponde con la proyectividad

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_0 \\ \mu_1 & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

donde la matriz es invertible porque sabemos que cumple $\mu_0\lambda_1 - \mu_1\lambda_0 \neq 0$.

Sólo nos queda comprobar que se cumple también para los casos en que no podemos aplicar la ecuación explícita.

2.7.13 Corolario.
Toda composición de perspectividades entre rectas del mismo plano son proyectividades.

Demostración.
Sabemos que toda perspectividad conserva las razones dobles, luego es una proyectividad, y la composición de homografías es una proyectividad.

2.7.14 Teorema.
Sea $f : r \to s$ una biyección entre rectas de un mismo plano proyectivo. Entonces, son equivalentes:
a) f conserva razones dobles.
b) f es una proyectividad.
c) f se descompone en composición de perspectividades.

Además, en la situación descrita en c), el número de perspectividades en que f se factoriza puede reducirse a una cantidad no superior a 3, o incluso a 2, si las rectas son distintas.

Demostración.
$a) \Rightarrow b)$ es el teorema anterior del anterior.
$b) \Rightarrow c)$ es el teorema 2.5.8.
$c) \Rightarrow a)$ Toda perspectividad conserva razones dobles, y la composición de dos funciones que conserven razones dobles también las conservará.

2.7.15 Teorema.
Una condición necesaria y suficiente para que una proyectividad f entre dos rectas r y s del mismo plano sea una perspectividad es que el punto de intersección de r con s constituya un punto doble.

Demostración.
Sea una proyectividad $\sigma : r \to s$. Sea $P = r \cap s$.
Si es una perspectividad, claramente $\sigma(P) = P$.
Recíprocamente, supongamos que $\sigma(P) = P$. Sea A=P y tomamos dos puntos B y C de r diferentes entre ellos. Sea $O = B\sigma(B) \cap C\sigma(C)$.
La perspectividad $\tau : r \to s$ con centro en O cumple $\tau(A) = A = \sigma(A)$, $\tau(B) = \sigma(B)$ y $\tau(C) = \sigma(C)$, luego τ y σ tienen idéntico comportamiento sobre el símplex $\{A, B, C\}$, y por tanto $\sigma = \tau$, es decir, se trata de una perspectividad.

2.7.16 Proposición. Ecuación implícita asociada a una proyectividad.

Dada una proyectividad $\sigma : r \to s$ entre dos rectas sobre un mismo cuerpo K, y fijados en ellas sendos sistemas de coordenadas, existen escalares $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$ satisfaciendo $\mu_0\lambda_1 - \mu_1\lambda_0 \neq 0$ para los cuales $x' = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x}$

Operando sobre la expresión anterior:

$$x' = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x}{\mu_0 + \mu_1 x} \Leftrightarrow (\mu_0 + \mu_1 x)x' = \lambda_0 + \lambda_1 x \Leftrightarrow \mu_0 x' + \mu_1 x\, x' = \lambda_0 + \lambda_1 x$$
$$\Leftrightarrow \mu_1 x\, x' - \lambda_1 x + \mu_0 x' - \lambda_0 = 0$$

Es decir, a una expresión de la forma $Axx' + Bx + Cx' + D = 0$ (Ecuación implícita de σ)

Se cumple $AD - BC \neq 0$. En efecto $AD - BC = \mu_1(-\lambda_0) - (-\lambda_1)\mu_0 = \lambda_1\mu_0 - \mu_1\lambda_0 \neq 0$

Los puntos límite vienen dados por aquellos cuyas abscisas respectivas son $x = -\frac{C}{A}$ y $x' = -\frac{B}{A}$

2.7.17 Proposición. Clasificación de las proyectividades en la recta según el número de puntos dobles.

Sea una proyectividad $\sigma : r \to r$ de una recta en sí misma y sea $Axx' + Bx + Cx' + D = 0$ su ecuación implícita asociada.

Un punto doble de f será aquel que cumpla $x = x'$, y por tanto será solución de la ecuación $Ax^2 + (B + C)x + D = 0$.

Esta ecuación en general será de segundo grado, pero puede ser de primer grado si $A = 0$, e incluso de grado cero si σ es la identidad.

Si es de segundo grado podemos encontrarnos en tres situaciones:

Con dos soluciones, en cuyo caso diremos que σ es una proyectividad **hiperbólica**, con una única solución, y se la llamará **parabólica**, y sin ninguna solución, y se hablará de proyectividad **elíptica**.

La razón de tales apellidos se justificará cuando se estudien más adelante las cónicas.

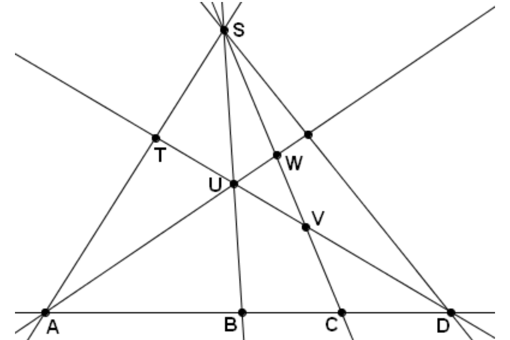
2.7.18 Proposición.
Sean cuatro puntos diferentes A, B, C, D de una recta. Entonces

$$(A, B, C, D) \overline{\wedge} (B, A, D, C)$$

Es decir, existe una proyectividad con la que se intercambian A y B y también C y D.

Demostración.
Sólo hay que observar la siguiente figura:

$$\left(A,B,C,D\right)\overset{S}{\overline{\wedge}}\left(T,U,V,D\right)\overset{A}{\overline{\wedge}}\left(S,W,V,C\right)\overset{U}{\overline{\wedge}}\left(B,A,D,C\right)$$



2.8 Clasificación de las proyectividades entre rectas.

2.8.1 Teorema. Clasificación de las proyectividades entre dos rectas.

Suponiendo que un autovalor es 1, las posibles formas canónicas de Jordan serán:
a) Si hay un único autovalor (con multiplicidad 2) y la matriz es diagonalizable, la forma canónica de Jordan sería $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En este caso, la proyectividad sería la identidad.
b) Si hay un autovalor doble y la matriz no es diagonalizable, la forma canónica de Jordan sería $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ver 2.7.2)
c) Si hay dos autovalores distintos, la forma canónica de Jordan sería $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, con $\lambda \neq 1$. (ver 8.7.1)

Observación: Si K no fuera algebraicamente cerrado (el caso natural en que pensar es $K = IR$), entonces tanto en el caso a) como en el caso b) el único autovalor está necesariamente en K. Sin embargo, en el caso c) hay que distinguir dos subcasos: que los dos autovalores estén en K o que ambos sean imaginarios (conjugados, si $K = IR$).

2.8.2 Proposición.
Sea $f : r \to r$ una proyectividad de una recta proyectiva en sí misma cuya matriz respecto de alguna referencia proyectiva es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces f tiene un único punto invariante p_0, y se tiene que

$$[p_0, p; f(p), f(f(p))] = 2$$

para cualquier $p \in r - \{p_0\}$. Por tanto, f está determinada conociendo p_0 y la imagen de un punto distinto de él.

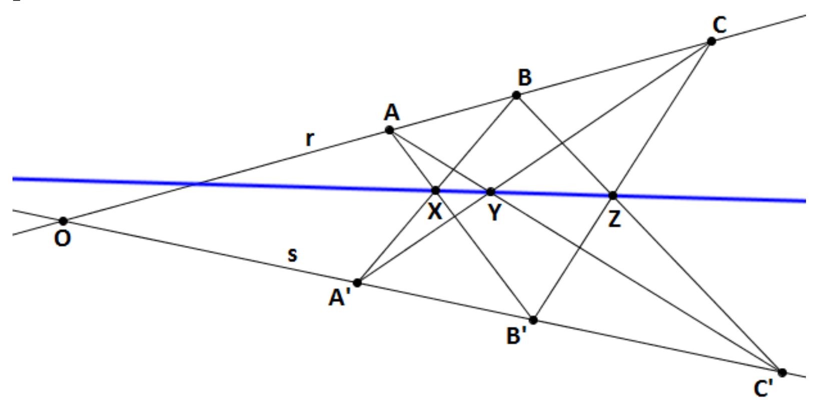
Demostración.
En las coordenadas respecto a las cuales la matriz de f es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene inmediatamente que $p_0 = (0,1)$ es el único punto invariante. Un punto p distinto de p_0 se puede escribir con coordenadas $(1, a)$, luego $f(p)$ tendrá coordenadas $(1, a+1)$ y $f(f(p))$ tendrá coordenadas $(1, a+2)$. Bajo la referencia $\{p_o, p, f(p)\}$ (que ya está normalizada, pues $(1, a+1) = (1, a) + (0,1)$), tenemos que
$f(f(p)) = (1, a+2) = 2(0,1) + (1, a)$, luego $[p_0, p; f(p), f(f(p))] = \frac{2}{1} = 2$.
Luego, conocidos p_0 y la imagen de un punto $f(p)$, la fórmula anterior permite conocer también la imagen de $f(p)$, con lo que tenemos la imagen de tres puntos, lo que determina de forma unívoca la proyectividad f.

2.9 Teorema de Pappus.

2.9.1 Teorema. Teorema de Pappus.

En el plano $P_2(IR)$ sean A, B, C puntos distintos sobre una recta r y A’,B’,C’ puntos distintos sobre otra recta s.

Entonces los puntos $X = AB'\cap A'B$, $Y = AC'\cap A'C$, $Z = CB'\cap C'B$ están alineados.



Demostración.

Entre los puntos A, B y C al menos dos de ellos no serán el punto O de intersección de las dos rectas. Supongamos que son A y B.

De la misma forma, entre A’, B’ y C’ al menos dos no serán el punto O. Supongamos que son A’ y B’.

Tomamos la referencia $\{A, B, A'; B'\}$. Entonces $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $A' = (0,0,1)$ y $B' = (1,1,1)$.

$C \in AB : z = 0 \Rightarrow C = (a,b,0)$ Pero $C \neq A \Rightarrow b \neq 0$ luego dividiendo por b nos queda $C = (a,1,0)$.

$C' \in A'B' : x = y \Rightarrow C' = (c,c,d)$ Pero $C' \neq A' \Rightarrow c \neq 0$ luego dividiendo por c nos queda $C' = (1,1,d)$.

$$\left.\begin{array}{l} AB' : y = z \\ A'B : 0 = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow X = AB' \cap A'B = (0,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} AC' : 0 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & d \end{vmatrix} \Leftrightarrow z = dy \\ A'C : 0 = \begin{vmatrix} x & 0 & a \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x = ay \end{array}\right\} \Rightarrow Y = AC' \cap A'C = (a,1,d)$$

$$CB':0=\begin{vmatrix} x & a & 1\\ y & 1 & 1\\ z & 0 & 1\end{vmatrix}\Leftrightarrow \begin{matrix} -a(y-z)+(x-z)=0\\ -ay+az+x-z=0\\ \dfrac{(a-1)z+x}{a}=y\end{matrix}$$

$$C'B:0=\begin{vmatrix} x & 1 & 0\\ y & 1 & 1\\ z & d & 0\end{vmatrix}\Leftrightarrow z=dx$$

$$\Rightarrow Z=CB'\cap C'B=\left(1,\frac{(a-1)d+1}{a},d\right)$$

Veamos que su determinante es cero, independientemente de a y d:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1\\ 1 & 1 & ((a-1)d+1)/a\\ 1 & d & d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & 1\\ d & d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & ((a-1)d+1)/a\end{vmatrix}=$$

$$=-(ad-d)+\left(a\frac{(a-1)d+1}{a}-1\right)=d-ad+(a-1)d+1-1=$$

$$=d-ad+d-d+1-1=0$$

Luego los tres puntos están alineados.

2.9.3 Teorema. Planos proyectivos analíticos papianos.

Se puede construir un plano proyectivo analítico $P_2(K)$ sobre cualquier anillo de división K. Pero entonces no necesariamente se cumplirá el Teorema de Pappus, es decir, no necesariamente será papiano.

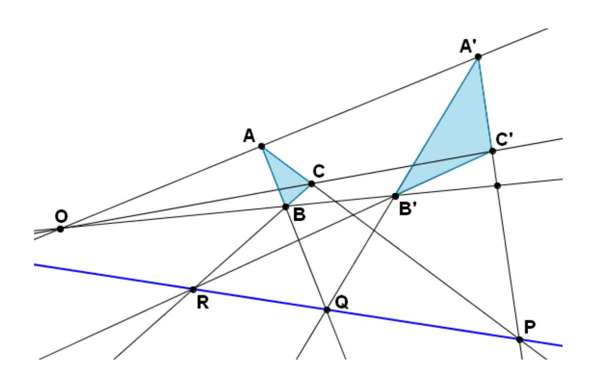
En general, en un plano proyectivo analítico $P_2(K)$ se cumplirá el Teorema de Pappus si y sólo si K es un anillo de división conmutativo, es decir, un cuerpo.

Demostración.

2.10 Teorema de Desargues.

2.10.1 Teorema. Teorema de Desargues.

Si dos triángulos tienen un centro de perspectiva, es decir, existe $O = AA' \cap BB' \cap CC'$, entonces los puntos $P = AC \cap A'C'$, $Q = AB \cap A'B'$ y $R = BC \cap B'C'$ están alineados.



Demostración.

Sea el punto $R' = BC \cap PQ$. Queremos demostrar que $R = R'$ (Pues entonces $R = R' \in PQ$ y por tanto están alineados).

Consideremos la homología φ de centro O, eje central PQ y $\varphi(A) = A'$.

Entonces

$\varphi(B) = ((AB \cap PQ) \vee A') \cap OB = B'$

$\varphi(C) = ((AC \cap PQ) \vee A') \cap OC = C'$

luego φ envía la recta BC a $B'C'$.

Tenemos que R' es un punto fijo pues pertenece a PQ, y por otro lado $R' \in BC \Rightarrow \varphi(R') \in \varphi(BC) = B'C'$.

Por tanto, $R' = \varphi(R') \in \varphi(BC) = B'C' \Rightarrow R' = BC \cap B'C' = R$

A dos triángulos de un plano en la configuración de Desargues se les llama, por razones obvias, homólogos.

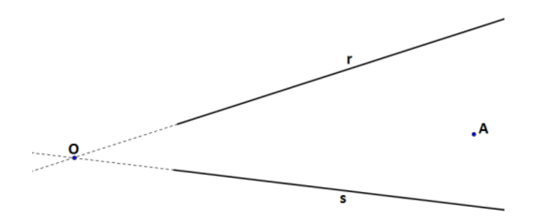
2.10.2 Teorema. Recíproco del teorema de Desargues.

El recíproco del teorema de Desargues es su dual, por el teorema de Desargues se cumple si y sólo si se cumple su recíproco.

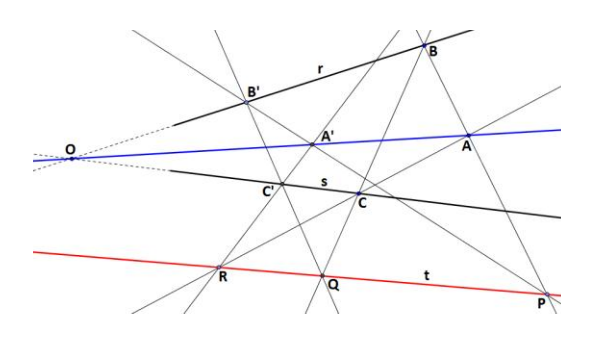
2.10.3 Aplicación. Determinación de recta con punto inaccesible (Por Desargues y por Pappus).

El recíproco del teorema de Desargues nos permite un método para localizar la recta que pasa por el punto de intersección de dos rectas cuando éste es inaccesible por cualquier motivo, por ejemplo, cuando caiga fuera del papel.

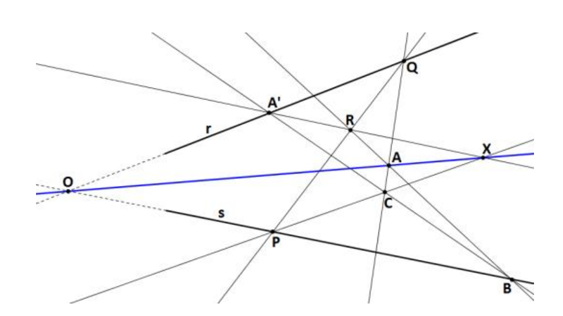
Tenemos dos rectas r y s tales que su punto O de intersección es inaccesible, y un punto $A \notin r \cup s$. Queremos determinar la recta AO.



Nuestro objetivo será construir dos triángulos homólogos ABC y A'B'C con centro en O. Por el teorema de Desargues, la recta buscada será AA'.
Sea $B \in r$ y $C \in s$ tales que ABC sea un triángulo. Marcamos los lados del triángulo y una recta t cualquiera. Sea $P = AB \cap t$, $Q = BC \cap t$ y $R = AC \cap t$.
Marcamos un punto cualquiera $B' \in r$. Sea $C' = B'Q \cap s$. Por último, el punto $A' = PB' \cap RC'$ completa el triángulo A'B'C' homólogo a ABC con centro O y eje t.



El Teorema de Pappus permite un método alternativo para encontrar la recta:
Sean $A', Q \in r$ y $P, B \in s$. Sean $R = AB \cap PQ$ y $C = A'B \cap AQ$



Las ternas (A'BC) y (PQR) cumplen las condiciones del teorema de Pappus, luego los puntos $A'Q \cap BP = r \cap s = O$, $BR \cap CQ = A$ y $A'R \cap CP$, al que denominaremos X estarán alineados. Luego sólo hay que trazar la recta que pasa por A y $A'R \cap CP$.

2.10.4 Proposición.
Si tenemos tres rectas r_1, r_2 y r_3 coincidentes en un punto O, una perspectiva de centro P

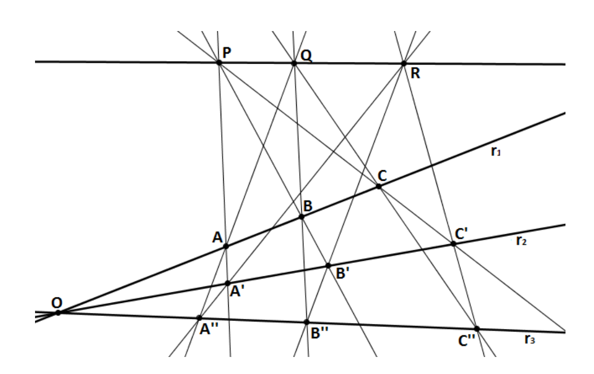
$$f : r_1 \to r_2, A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$$

y una perspectividad de centro R

$$g : r_2 \to r_3, A' \mapsto A'', B' \mapsto B'', C' \mapsto C''$$

entonces existe un punto Q en la recta PR tal que $g \circ f$ es la perspectividad de centro Q.

Demostración.



Aplicamos tres veces el teorema de Desargues:

Los triángulos AA'A'' y BB'B'' tienen un centro de perspectiva O, luego los puntos $P = AA' \cap BB'$, $R = A'A'' \cap B'B''$ y $Q_1 = AA'' \cap BB''$ están alineados.

De la misma forma, los triángulos BB'B'' y CC'C'' tienen un centro de perspectiva O, luego los puntos $P = BB' \cap CC'$, $R = B'B'' \cap C'C''$ y $Q_2 = BB'' \cap CC''$ están alineados.

Pero puesto que $Q_1, Q_2 \in PR$ y $Q_1, Q_2 \in BB''$ y $PR \neq BB''$, entonces $Q_1 = Q_2$

Y por último, los triángulos AA'A'' y CC'C'' tienen un centro de perspectiva O, luego los puntos $P = AA' \cap CC'$, $R = A'A'' \cap C'C''$ y $Q_3 = AA'' \cap CC''$ están alineados. Y con el mismo razonamiento anterior se comprueba que $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$ es el punto buscado.

3 El plano afín en el contexto proyectivo.

3.1 La inmersión del plano afín en el proyectivo.

3.1.1 Definición. La inmersión canónica.
Todo elemento de IR^2 se puede considerar dentro de $P^2(IR)$ bajo la inmersión

$$i : IR^2 \to P^2(IR)$$
$$(x, y) \mapsto i(x, y) = [(x, y, 1)]$$

Esta inmersión mantiene las rectas de IR^2, (es decir los conjuntos de la forma $\{ax + by + c = 0\}$ con a y b no ambos nulos) dentro de las rectas proyectivas $\{ax + by + cz = 0\}$.
A raíz de la inclusión anterior, consideraremos siempre el espacio afín IR^2 como subconjunto del plano proyectivo: $IR^2 \subset P^2(IR)$.

3.1.2 Definición. Puntos del infinito.
Bajo la inmersión $i(x)$ definida en el apartado anterior, todo punto de $P^2(IR)$ proviene de un elemento $(x, y) \in IR^2$, exceptuando la recta $z = 0$:

$$z \neq 0 \Rightarrow Q = [(x, y, z)] = \left[\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{z}{z}\right)\right] = \left[\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)\right] = i\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

Esta recta proyectiva será la recta de “puntos del infinito” del plano proyectivo.

La recta $z = 0$ se puede considerar como punto $(0,0,1)$ del dual.

Toda recta afín $\{ax + by + c = 0\}$ se extenderá a la recta proyectiva $\{ax + by + cz = 0\}$, que tendrá un único punto añadido, el punto $[(-b, a, 0)]$. A dicho punto le llamaremos “punto del infinito” de la recta afín.

Interpretación de los puntos del infinito en el plano euclídeo.
Toda recta r del plano euclídeo queda determinada por un punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector $v = (v_1, v_2)$:

$$r = \{(x, y) = (p_1, p_2) + \lambda(v_1, v_2)\ \lambda \in K\}$$

Es decir, serán los puntos de la forma $(p_1 + \lambda v_1, p_2 + \lambda v_2)$.
Queremos estudiar el comportamiento de r cuando $\lambda \to \infty$. Dentro del plano euclídeo quedaría indeterminado, pero si consideramos los puntos de esta recta dentro del plano proyectivo gracias a la inmersión i, quedarán de la forma

$$(p_1 + \lambda v_1, p_2 + \lambda v_2, 1)$$

Multiplicando por $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ nos queda $\left(\frac{p_1 + \lambda v_1}{\lambda}, \frac{p_2 + \lambda v_2}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right) = (\alpha\, p_1 + v_1, \alpha\, p_2 + v_2, \alpha)$

Y ahora $\lambda \to \infty \Leftrightarrow \alpha \to 0 \Leftrightarrow (\alpha\, p_1 + v_1, \alpha\, p_2 + v_2, \alpha) \to (v_1, v_2, 0)$

Así pues, el punto $(v_1, v_2, 0) \in A_\infty$ es un buen candidato para el punto del infinito de la recta r.

Por otro lado, las rectas de A se pueden considerar como conjuntos de puntos de la forma $\{ax + by + c = 0\}$

$$\{ax + by + c = 0\} \Leftrightarrow \langle (a,b,c),(x,y,1) \rangle = 0$$

Es decir, son los puntos del plano proyectivo de la recta $[(a,b,c)]$. Pero además esta recta incluye el punto impropio $(-b, a, 0)$.

3.1.3 Paralelismo.
Diremos que dos rectas del plano proyectivo son paralelas cuando su punto de intersección esté en la recta del infinito $A_\infty = (0,0,1)$.

Observación. En principio en un plano proyectivo no existe la noción de paralelismo, pues dos rectas diferentes siempre se cortan en un punto. La definición anterior permite interpretar de una forma muy elegante el paralelismo de rectas en el plano afín.

La recta s que pasa por un punto P y es paralela a una recta r será pues la recta que pasa por P y por el punto del infinito de la recta r:
$s = \overleftrightarrow{PQ}$ donde $Q = r \cap A_\infty$

Veamos con un ejemplo las diferencias entre los métodos afín y proyectivo para encontrar la recta paralela a una dada por un punto exterior:

Sean los puntos del plano afín $A = (1,3)$, $B = (4,5)$ y $C = (4,1)$. Queremos determinar la recta r que pasa por C y es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

El vector director de $\overleftrightarrow{AB}$ es $\vec{v} = B - A = (3,2)$, luego la recta buscada será
$r : (4,1) + \lambda(3,2)$, es decir, $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-1}{2} \Leftrightarrow 2x - 3y - 5 = 0$

En el plano proyectivo:
Estos puntos en el plano proyectivo serán $A = (1,3,1)$, $B = (4,5,1)$ y $C = (4,1,1)$.
La recta $\overleftrightarrow{AB}$ será $\overleftrightarrow{AB} = A \times B = (-2,3,-7)$ y por tanto su punto del infinito será
$P = \overleftrightarrow{AB} \cap A_\infty = (-2,3,-7) \times (0,0,1) = (3,2,0)$
La recta buscada será $\overleftrightarrow{CP} = (4,1,1) \times (3,2,0) = (2,-3,-5) \cong 2x - 3y - 5z = 0$, es decir, la inmersión de la recta afín $2x - 3y - 5 = 0$. Observamos que obtenemos el mismo resultado.

3.2 Razón doble y razón simple.

3.2.1 Definición. Razón simple.

Dados tres puntos alineados $A, B, C \in A_2(IR)$, y sea $AB_\infty = AB \cap r_\infty$, definimos su razón simple (A,B,C) por

$$(A, B, C) = (A, B; C, AB_\infty)$$

3.2.2 Proposición.

$$(A, B, C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$$

Demostración.

3.3 Transformaciones afines en el contexto proyectivo.

3.3.1 Definición. Afinidad.
Sea el plano proyectivo real $P_2(IR)$ en el que se distingue la recta del infinito l_∞.
Se llama afinidad a toda homografía que deje fija la recta del infinito: $f(l_\infty) = l_\infty$, o dicho de otro modo, cuando la recta del infinito sea doble.

3.3.2. Proposición. Forma matricial de una afinidad.
Sea $f \in \mathrm{Pr}(2)$ tal que $f(l_\infty) = l_\infty$, donde $l_\infty : z = 0$ es la recta del infinito canónica.

Supongamos que $f = f_M$ para cierta matriz invertible $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Puesto que $[e_0] = (1,0,0) \in l_\infty$, entonces $f([\mathrm{e}_0]) \in l_\infty$, luego tendrá la tercera componente igual a cero.

Pero $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$, luego $g = 0$.

De la misma forma, mediante el punto $[e_1] = (0,1,0) \in l_\infty$, llegamos a $h = 0$.
Puesto que $\det(M) \neq 0$, y $g = h = 0$, forzosamente $i \neq 0$, y por tanto, puesto que la matriz M es única salvo homotecias, podemos dividir entre i y llegar a una matriz equivalente en la que $i = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Esta matriz, para todo punto $P \notin l_\infty$, $P = (x, y, 1)$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es exactamente la misma imagen que la de la transformación

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \qquad (2)$$

y es una transformación afín porque se cumple $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

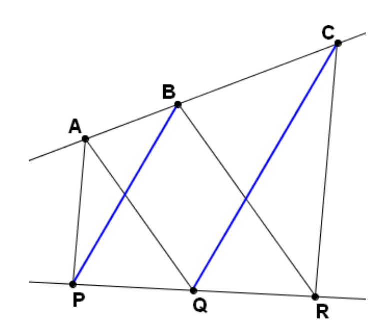
Recíprocamente, dada cualquier transformación afín como (2), podemos construir una matriz del tipo (1), claramente invertible, que será una extensión de la transformación afín a todo el plano proyectivo y que dejará fija la recta del infinito.
Así pues, tenemos un isomorfismo de grupos

$$Af(2) \cong \left\{ f \in \Pr(2) \mid f(l_\infty) = l_\infty \right\}$$

es decir, las transformaciones que dejan invariante la recta del infinito se pueden identificar con las transformaciones afines.

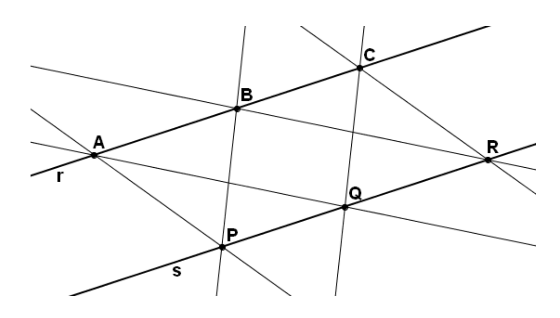
3.4 Teorema de Pappus en el contexto afín.

3.4.1 Teorema. Versión afín del teorema de Pappus.
Sean (A, B, C) una terna de puntos distintos de una recta r de un plano afín, y (P, Q, R) otra terna de puntos situados sobre otra recta s. Supongamos que $O = r \cap s \neq \{A, B, C\}$, y se cumple $AQ // BR$ y $AP // CR$. Entonces $PB // QC$.



Demostración.
En un contexto proyecto, $AQ // BR \Leftrightarrow AQ \cap BR = X \in r_\infty$, y
$AP // CR \Leftrightarrow AP \cap CR = Z \in r_\infty$.
Reordenando la segunda terna a (R, Q, P), observamos que se dan las condiciones del teorema de Pappus, de donde deducimos que $BP \cap CQ = Y \in r_\infty$ por estar los tres alineados, luego $BP // CQ$ en un contexto afín.

Teorema. Teorema menor de Pappus.
Dados tres puntos diferentes A, B, C sobre una recta r y tres puntos diferentes P, Q, R sobre una recta paralela s, si $AQ // BR$ y $AP // CR$ entonces $BP // CQ$



Demostración.
Es un caso particular del teorema anterior cuando $O = r \cap s \in r_\infty$.

3.5 Teorema de Desargues en el contexto afín.

3.5.1 Teorema. Versión afín del teorema de Desargues.
El teorema de Desargues produce varias versiones afines dependiendo de la cantidad de sus elementos que sean arrebatados por la recta del infinito.
Sean (A, B, C) y (A', B', C') dos ternas de puntos de un plano afín tales que, o bien AA', BB' y CC' se cortan en un punto O, o bien las tres rectas son paralelas entre sí.
a) Si $P = AC \cap A'C'$, $Q = AB \cap A'B'$ y $R = BC \cap B'C'$, entonces $R \in PQ$.
b) Si $AC // A'C'$ y $AB // A'B'$ entonces $BC // B'C'$.
c) Si $AC // A'C'$, $Q = AB \cap A'B'$ y $R = BC \cap B'C'$, entonces $QR // AC // A'C'$.

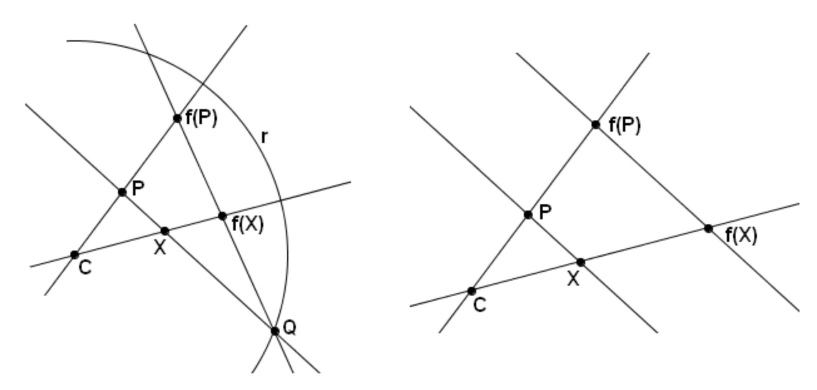
Recíprocamente, si (A, B, C) y (A',B',C') son dos ternas de puntos de un plano afín satisfaciendo cualesquiera de las circunstancias a), b) o c), entonces o bien AA', BB' y CC' se cortan en un punto O, o bien las tres rectas son paralelas entre sí.

Demostración.
La demostración se reduce a aplicar el teorema de Desargues o su recíproco en el plano proyectivo en el que se sumerge el afín y examinar las distintas posibilidades para la recta impropia según contenga o no el centro de homología y a los puntos P, Q y R del eje de homología.

3.6 Clasificación afín de proyectividades.

3.6.1 Definición. Homotecia.
Una homotecia es una homología general cuyo eje central es la recta del infinito.

La proposición anterior nos da un método para encontrar la imagen $f(X)$ de cualquier punto X dados el centro C y un par homólogo $P, f(P)$ con $P \neq C$.
En un contexto proyectivo (imagen de la izquierda), determinamos $Q = PX \cap r$ y $f(X) = CX \cap Qf(P)$.
En un contexto afín (imagen de la derecha) , trazamos la recta $s // PX$ por $f(P)$, y $f(X) = s \cap CX$.



4 Geometría proyectiva en un contexto euclídeo.

4.1 Razón simple.

4.1.1 Definición. Razón simple de tres puntos.

Dados tres puntos alineados A, B, C, definimos su razón simple como

$$(\mathrm{ABC}) = \frac{AC}{BC}$$

En donde hemos utilizado distancias con signo: $AB = -BA$

4.1.2 Razón simple y separación de puntos.

Si el punto C está en el interior del segmento AB, entonces (ABC)<0

Demostración.

$$(\mathrm{ABC}) = \frac{AC}{BC} = \frac{+}{-} = -$$

4.1.3 Razón simple y punto medio.

Si C es el punto medio del segmento AB, entonces $(\mathrm{ABC}) = -1$.

Demostración.

$$\mathrm{AC} = \mathrm{CB} = \text{-BC} \Rightarrow (\mathrm{ABC}) = \frac{\mathrm{AC}}{BC} = \frac{1}{-1} = -1$$

4.2 Razón doble.

Proposición. Razón doble mediante distancias orientadas.
Dados dos puntos A y B de la recta real R, podemos definir la distancia orientada entre A y B como

$$\overline{AB} = B - A$$

Esta distancia será positiva si B se encuentra a la derecha de A y negativa en caso contrario.

Sean A, B, C y D cuatro puntos de la recta real R. Los consideramos dentro de la recta proyectiva $P(R)$, es decir, $A=(a,1)$, $B=(b,1)$, $C=(c,1)$ y $D=(d,1)$.

Luego $[A,C]=\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a-c=-|AC|$, y de la misma manera $[B,D]=-|BD|$, $[A,D]=-|AD|$, y $[B,C]=-|BC|$, y por tanto

$$(a,b;c,d)=\frac{[a,c][b,d]}{[a,d][b,c]}=\frac{(-|AC|)(-|BD|)}{(-|AD|)(-|BC|)}=\frac{|AC|\cdot|BD|}{|AD|\cdot|BC|}=\frac{|AC|}{|AD|}/\frac{|BC|}{|BD|}$$

(En alemán la razón doble se denomina “Doppelverhältnis”, es decir, “razón de razones”)

Observación: La expresión de la razón doble mediante determinantes tiene la ventaja de que se puede aplicar a puntos en el infinito.

4.2.1 Definición. Razón doble de cuatro puntos. “Cross-Ratio”.
Sean cuatro puntos A, B, C y D sobre una recta r.

A B C D

Definimos la razón doble de los cuatro puntos por

$$m=(A,B;C,D)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{AC}{BC}/\frac{AD}{BD}=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$$

Observación: Consideramos las medidas de segmentos con signo: $BA=-AB$.

4.2.2 Razón doble y permutaciones.
Consideremos cómo cambia la razón doble cuando realizamos permutaciones entre los cuatro puntos involucrados.

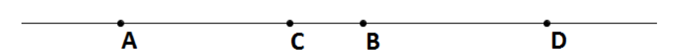
$$[A,B;C,D]=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}=m$$

$$[B,A;C,D]=\frac{BC\cdot AD}{AC\cdot BD}=\frac{1}{m}$$

$$[A,B;D,C]=\frac{AD\cdot BC}{BD\cdot AC}=\frac{1}{m}$$

$$[D,B;C,A]=\frac{DC\cdot BA}{BC\cdot DA}=\frac{-CD\cdot -AB}{BC\cdot -AD}=-\frac{CD\cdot AB}{BC\cdot AD}=n$$

Definición. Separación armónica de puntos.
Dados cuatro puntos alineados A, B, C y D, donde C está en el interior del segmento AB, diremos que los puntos C y D separan armónicamente a los puntos A y B cuando $(A,B;C,D)=-1$.



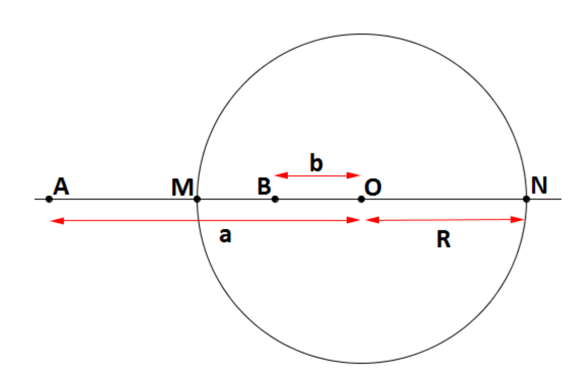
Equivalentemente,
$$(A,B;C,D)=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=-1\Leftrightarrow AC\cdot BD=-AD\cdot BC\Leftrightarrow AC\cdot BD=AD\cdot CB$$

La expresión de la derecha $AC\cdot BD=AD\cdot CB$ es muy útil porque ayuda a memorizarla: El producto de los segmentos “exteriores” es igual al producto de los segmentos “interior” por el “total”.

Otra expresión equivalente es:
$$AC\cdot BD=AD\cdot CB\Leftrightarrow\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$$

Es decir, la razón que determina C respecto a los puntos A y B es la misma que determina D respecto a dichos puntos.

Corolario.
Si A, B, M, N es una cuaterna armónica, entonces A y B son inversos respecto de la circunferencia de diámetro MN.



Demostración.
$$-1=(A,B;M,N)=\frac{AM\cdot BN}{AN\cdot BM}=\frac{AM}{AN}\cdot\frac{BN}{BM}\Rightarrow\frac{AM}{AN}=\frac{MB}{BN}$$

Prescindiendo de los signos de los segmentos,
$AM=a-R,\ AN=a+R,\ MB=R-b,\ BN=R+b$

Luego

$$\frac{AM}{AN}=\frac{MB}{BN}\Rightarrow\frac{a-R}{a+R}=\frac{R-b}{R+b}\Rightarrow(a-R)(R+b)=(a+R)(R-b)\Rightarrow$$

$$aR+ab-R^2-Rb=aR-ab+R^2-Rb\Rightarrow$$

$$ab-R^2=-ab+R^2$$

$$2ab=2R^2\Rightarrow ab=R^2$$

Proposición.

Si $(A,C;B,D)=-1$, y O es el punto medio del segmento AC, entonces $OB\cdot OD=OC^2=OA^2$.

Demostración.

$$-1=(A,C;B,D)=\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}\Leftrightarrow AB\cdot CD=-AD\cdot CD$$

Insertamos el origen O: $OA=-OC$

$$(OB-OA)(OD-OC)=-(OD-OA)(OB-OC)\Leftrightarrow$$

$$(OB+OC)(OD-OC)=-(OD+OC)(OB-OC)\Leftrightarrow$$

$$OD\cdot OB+OC\cdot OD-OC\cdot OB-OC^2=-OB\cdot OD+OC\cdot OD-OB\cdot OC+OC^2\Leftrightarrow$$

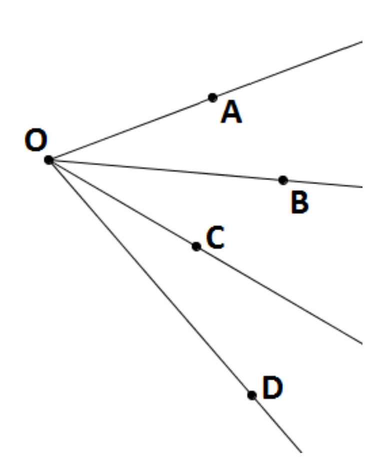
$$2OD\cdot OB=2OC^2\Leftrightarrow$$

$$OD\cdot OB=OC^2=OA^2$$

Nota: El recíproco también es cierto.

4.2.3 Definición. Razón doble de un haz de cuatro rectas.

Dado un haz de cuatro rectas OA, OB, OC y OD concurrentes en un punto O

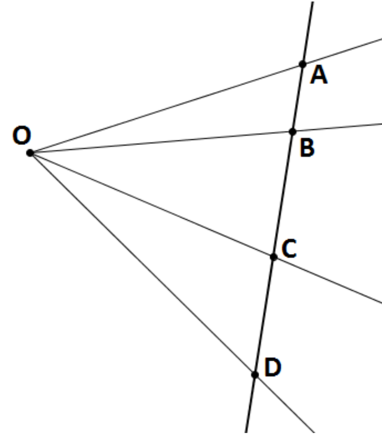


Definiremos su razón doble por $\dfrac{sen\ AOC}{sen\ BOC}:\dfrac{sen\ AOD}{sen\ BOD}=\dfrac{sen\ AOC\cdot sen\ BOD}{sen\ BOC\cdot sen\ AOD}$

Observación 1: En la razón doble de un haz, los ángulos y por lo tanto sus senos llevan el signo que les corresponde, según el sentido en que se cuentan los ángulos positivos.

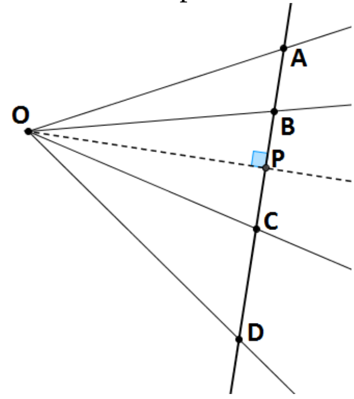
Observación 2: Por consideraciones análogas a las expuestas en XXXX, probaríamos que de las 24 relaciones que pueden formarse agrupando de distinto modo las cuatro rectas O A, O B, OC, OD, solo seis son distintas, y que de estas, tres son inversas de las otras tres.

4.2.4 Teorema. Teorema fundamental de la razón doble.
Sea un haz OABCD, y supongamos que los puntos A, B, C y D están alineados.



Entonces la razón doble de los puntos A, B, C, D es igual a la razón doble de las rectas OA, OB, OC, OD.

Demostración.
Trazamos la perpendicular a la recta ABCD por O



$$OA \cdot OC \cdot sen\ AOC = AC \cdot OP \Rightarrow sen\ AOC = \frac{AC \cdot OP}{OA \cdot OC}$$

$$OB \cdot OD \cdot sen\ BOD = BD \cdot OP \Rightarrow sen\ BOD = \frac{BD \cdot OP}{OB \cdot OD}$$

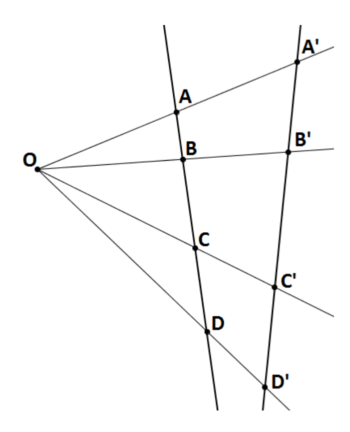
$$OB \cdot OC \cdot sen\ BOC = BC \cdot OP \Rightarrow sen\ BOC = \frac{BC \cdot OP}{OB \cdot OC}$$

$$OA \cdot OD \cdot sen\ AOD = AD \cdot OP \Rightarrow sen\ AOD = \frac{AD \cdot OP}{OA \cdot OD}$$

$$\frac{sen\ AOC}{sen\ BOC} : \frac{sen\ AOD}{sen\ BOD} = \frac{sen\ AOC \cdot sen\ BOD}{sen\ BOC \cdot sen\ AOD} = \frac{\frac{AC \cdot OP}{OA \cdot OC} \cdot \frac{BD \cdot OP}{OB \cdot OD}}{\frac{BC \cdot OP}{OB \cdot OC} \cdot \frac{AD \cdot OP}{OA \cdot OD}} =$$

$$= \frac{\frac{AC}{OA} \cdot \frac{BD}{OB}}{\frac{BC}{OB} \cdot \frac{AD}{OA}} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$

4.2.5 Teorema.
Dados dos sistemas de cuatro puntos A, B, C, D el primero, A', B', C', D' el segundo, sobre dos rectas r y r', en los que se corresponden los puntos A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; y tales que las rectas AA', BB' , CC', DD', que unen los puntos homólogos o correspondientes, concurren en un punto O, la razón doble del sistema ABCD será igual a la del A'B'C'D'.



Demostración: Efectivamente, ambas razones dobles son iguales a la razón doble del haz de rectas OABCD.

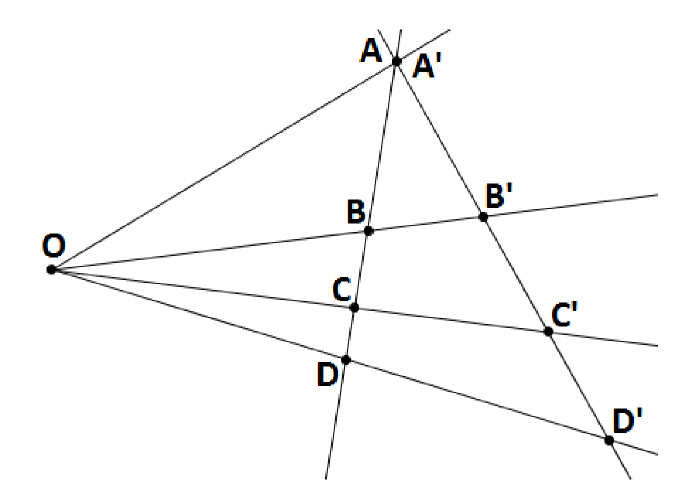
Observación: El teorema anterior puede enunciarse también de este otro modo:
Si cortamos un haz de cuatro rectas por dos secantes cualesquiera r, r’, las razones dobles de los puntos de intersección serán iguales.

Observación: Este teorema lo encontramos en el libro VII de las “Colecciones Matemáticas” de Pappus, y fue desarrollado por Desargues en 1639.

4.2.6 Teorema.
Dados sobre dos rectas r, r' dos sistemas, de cuatro puntos cada uno, A, B, C, D el primero, A’, B’, C’, D’ el segundo, cuyas razones dobles sean iguales, siempre pueden colocarse dichos sistemas sobre un mismo haz. Es decir, de tal modo que las rectas AA’, BB’, CC’ y DD’, que unen los puntos correspondientes, concurran en un mismo punto O.

Demostración. Coloquemos las rectas dadas r, r’ en cualquier dirección, pero de manera que dos puntos correspondientes A y A' , por ejemplo, coincidan, y vamos a demostrar que las rectas BB', CC’, DD' concurrirán en un cierto punto O.
En efecto, tracemos las rectas BB' , CC’ , que unen dos pares de puntos correspondientes, y sea O su punto de intersección. Tracemos asimismo las rectas OA y

OD', y vemos desde luego que los puntos A, A’, B, B’', C, C’ se hallan sobre el haz de tres rectas OABC: falta probar que la recta OD' pasa por el punto D.



Sea D'' el punto de corte entre la recta ABCD y la recta OD’. Queremos ver que $D = D''$.

Puesto que ambos grupos de cuatro puntos tienen la misma razón doble, por el teorema anterior se cumplirá

$$\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{B'C' \cdot A'D'}$$

Pero también

$\frac{A'C' \cdot B'D'}{B'C' \cdot A'D'} = \frac{AC \cdot BD''}{BC \cdot AD''}$ puesto que son dos grupos de cuatro puntos en perspectiva (????).

Luego

$$\frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{AC \cdot BD''}{BC \cdot AD''} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{BD''}{AD''} = \frac{BD + DD''}{AD + DD''}$$

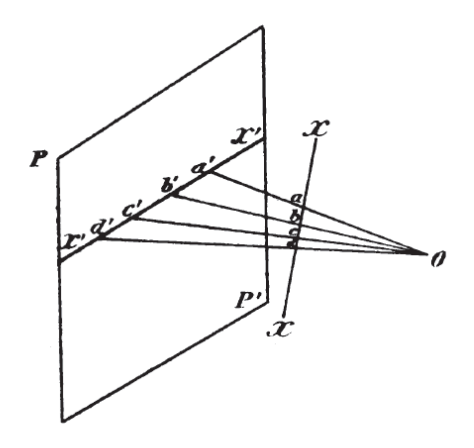
Resultado absurdo, porque un quebrado distinto de la unidad, varía cuando a numerador y denominador se agrega o se le resta una misma cantidad, y absurdo que solo desaparece suponiendo $DD'' = 0$, es decir, cuando los puntos D y D'', coinciden.

Observación. No es absolutamente necesario, para colocar los ocho puntos A, B, C, D, A', B', C', D', sobre un mismo haz, que coincidan dos de los puntos correspondientes; bien al contrario, el problema admite otras infinitas soluciones.

Teorema.

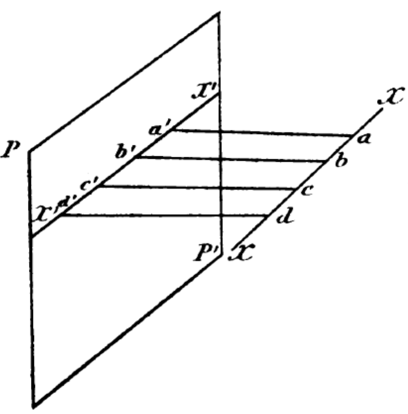
La razón doble de la perspectiva (o dicho de otro modo de la proyección cónica) de cuatro puntos situados sobre una recta, es igual á la razón doble de dichos cuatro puntos.

Demostración. Sea O el polo ó punto de vista, y PP' el plano del cuadro.



Las proyecciones ó perspectivas a, b', c, d', de los puntos a, b, c, d, se hallarán:
1º Sobre las rectas Oa, Ob, Oc, Od.
2º Sobre la recta X'X , intersección del plano OXX con el plano de proyección PP'; luego el sistema Oabcd a'b'c'd' no es otra cosa que un haz cortado por dos trasversales, y por lo tanto tendremos Ra(a,b,c,d) =Ra(a',b',c',d').

Observación. Como el teorema anterior subsiste sea cual fuere la posición del punto O, resulta que aún se verificará cuando se halle en el infinito, y por lo tanto, para la proyección cilíndrica.



Definición.
Cuando una propiedad, ya de posición geométrica, ya de relación métrica, subsiste en la proyección de una figura, se dice que la relación de que se trata es proyectiva. Dedúcese de esta definición, y de lo demostrado en los números 30 y 31 , que la razón doble de cuatro puntos en línea recta, y la de un haz, son relaciones proyectivas.

Consideraciones generales.
Muchos de los métodos empleados en la moderna geometría se reducen a uno general, conocido con el nombre de transformación de figuras. Trasformar la figura propuesta en otra, en la que sea mas fácil que en aquella determinar ciertas relaciones, y pasar de esta segunda figura auxiliar a la primitiva, es la esencia, por decirlo así, de dicho método. Uno de los sistemas empleados con este fin es el de la proyección cónica: basta en efecto proyectar la figura dada de tal suerte que se simplifique, por decirlo así, su forma; y, estudiada su proyección, toda propiedad de esta última que sea proyectiva, será propiedad de la figura propuesta y aun de todas las secciones planas del cono proyectante. Y sin embargo, en una sola, y la más sencilla, y la más propia para el caso, ha sido demostrada.

Presentemos un ejemplo.
Sabido es que todo cono de segundo grado admite dos sistemas de secciones circulares; pues bien, dada una cónica cualquiera C, en la que se desea estudiar tal o cual clase de propiedades, considérese dicha cónica como base de un cono, determínese una de las secciones circulares c, estúdiense en el círculo las relaciones equivalentes a las que deseamos estudiar en la cónica, y es claro que todas aquellas que sean proyectivas serán aplicables a la cónica C, como a todas las secciones planas del cono proyectante. Así habremos reducido el estudio de la elipse, de la parábola y de la hipérbola al estudio del círculo. Queda sin embargo en pie una dificultad: ¿cuáles son las propiedades proyectivas? Cuestión es esta que, planteada en toda su generalidad, no podemos resolver; pero dedúcese de lo expuesto, que las razones dobles lo son; y he aquí una de las razones en que se funda su gran importancia en la moderna geometría.

4.3 Puntos en relación armónica.

4.3.1 Razón doble y separación de puntos.

Dados cuatro puntos alineados A, B, C, D, diremos que la pareja (A, B) separa la pareja (C, D) si el "eslabón" AB se enlaza con el "eslabón" CD.

La pareja de puntos $\{C, D\}$ separa la pareja $\{A, B\}$ cuando (A,B;C,D)<0

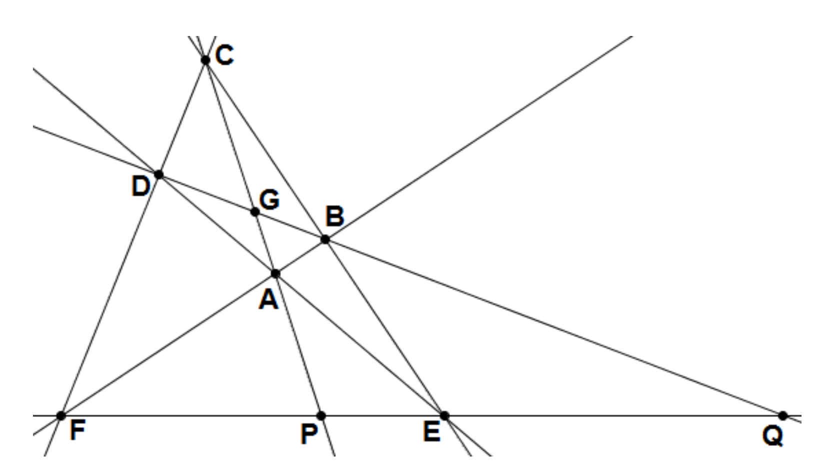
En efecto: ABCD → (A,B;C,D)= AC.BD / BC.AD = + +/ + + = +
ACBD --> (A,B;C,D)= AC.BD / BC.AD =+ + / - + = -
ADBC --> (A,B;C,D)= AC.BD / BC.AD =+ + / + + = +
…

4.3.2 Cuaterna armónica. Separación armónica de puntos.

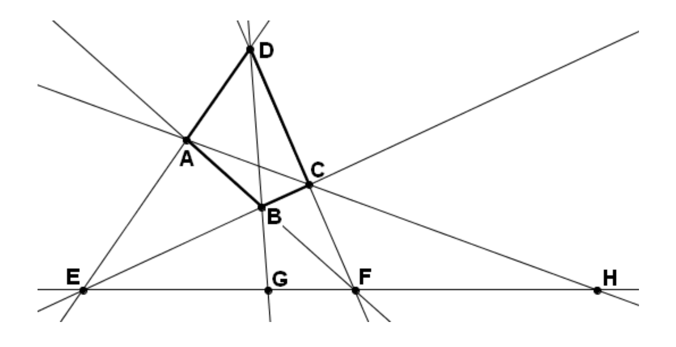
Diremos que los cuatro puntos A, B, C, D forman una cuaterna armónica, o que la pareja AC separa armónicamente la pareja BD cuando (A,B;C,D)=-1

4.3.3 Teorema. Cuaterna armónica y cuadriángulos completos.

Dado un cuadriángulo completo ABCD, siguiendo la nomenclatura de 5.2.4, y tomando $P = AC \cap EF$ y $Q = DB \cap EF$, se tiene (F,E;P,Q)=-1



Sea ABCD un cuadriángulo completo.
Sea E la intersección de los lados AD y BC.
Sea F la intersección de los lados AB y CD.
Sea G la intersección de la diagonal BD con la recta EF.
Sea H la intersección de la diagonal AC con la recta EF.



Entonces $(E\,F\,G\,H) = -1$.

Demostración.
Por el Teorema de Ceva aplicado al triángulo ΔDEF se cumple

$$\frac{DA}{AE}\cdot\frac{EG}{GF}\cdot\frac{FC}{CD}=1$$

Por el Teorema de Menelao aplicado al mismo triángulo y la recta AC, se cumple

$$\frac{DA}{AE}\cdot\frac{EH}{HF}\cdot\frac{FC}{CD}=-1$$

Luego

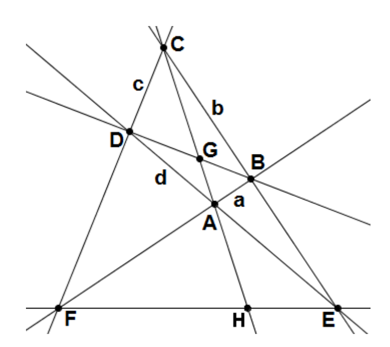
$$-1=1:(-1)=\frac{DA}{AE}\cdot\frac{EG}{GF}\cdot\frac{FC}{CD}:\left(\frac{DA}{AE}\cdot\frac{EH}{HF}\cdot\frac{FC}{CD}\right)=\frac{EG}{GF}:\frac{EH}{HF}=\frac{EG}{FG}:\frac{EH}{FH}=(E\,F\,G\,H)$$

4.3.4 Definición. Cuarto armónico.
Dados tres puntos alineados A, B, C, definiremos como el cuarto armónico D aquel punto de la recta tal que (A,B;C,D)=-1

4.3.5 Proposición. Determinación del cuarto armónico.
Dados tres puntos A, B, C alineados siempre es posible determinar el cuarto armónico asociado Basta construir un cuadriángulo completo que tenga a A y B como diagonales...

4.3.6 Proposición.
Cada una de las tres diagonales de un cuadrilátero completo está dividida armónicamente por las otras dos.

Demostración.
Sea un cuadrilátero completo $\{a,b,c,d\}$. Sean $A=a\cap d$, $B=a\cap b$, $C=c\cap b$, $D=c\cap d$, $E=d\cap b$, $F=a\cap c$ los vértices asociados, y determinamos las tres diagonales DB, AC y EF.
Demostremos la proposición para la diagonal AC.
Sean $G=DB\cap AC$ y $H=EF\cap AC$.



Proyectamos EF al infinito (siguiendo el razonamiento de [ASKWITH], página 75).
$(C,A;G;H)=(C,A,G)=-1$

Puesto que al proyectar EF en el infinito, se cumple que $\frac{CG}{GA}=1$ puesto que el cuadrilátero $\{a,b,c,d\}$ es un paralelogramo y el punto G es su punto medio.

De la misma forma se demuestra la proposición para las otras dos diagonales.

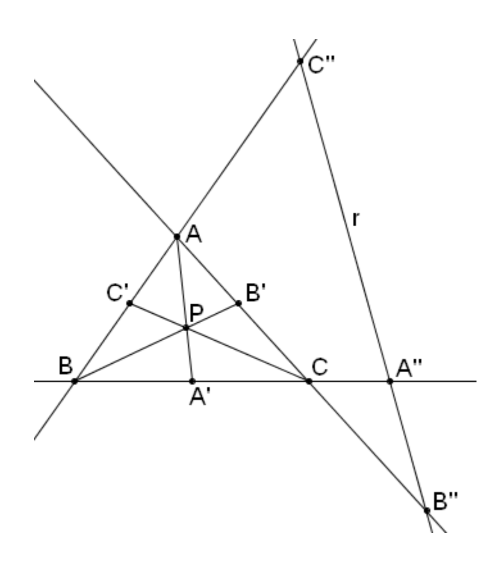
4.4 Teoremas de Ceva y Menelao.

De 4.4.1 a 4.4.5 Fuente: "A Unified Proof of Ceva and Menelaus'Theorems Using Projective Geometry" por Julio Benítez.

4.4.1 Teorema.

Sea ABC un triángulo en un plano proyectivo y tres puntos $A'\in BC$, $B'\in AC$ y $C'\in AB$. Las rectas AA', BB' y CC' serán concurrentes en un punto P si y sólo si para cualquier recta r que no pase por ningun vértice del triángulo, y siendo $A''=BC\cap r$, $B''=AC\cap r$ y $C''=AB\cap r$, se cumpla

$$[B,C;A',A'']\cdot[C,A;B',B'']\cdot[A,B;C',C'']=-1$$



Demostración.

Podemos suponer las ecuaciones de las rectas involucradas:

$AB: z=0$, $BC: x=0$, $AC: y=0$ y $r: x+y+z=0$.

Luego A=(1,0,0), B=(0,1,0), C=(0,0,1), $C'=(1,-1,0)$, $B'=(1,0,-1)$ y $A'=(0,1,-1)$.

$A''=(0,1,\alpha)$ con $\alpha\neq 0$ puesto que $A''\in BC$ y $A''\neq B,C$.

Luego AA'' tendrá por ecuación $\alpha y-z=0$.

De la misma forma, $B''=(\beta,0,1)$ con $\beta\neq 0$ puesto que $B''\in AC$ y $B''\neq A,C$.

Luego BB'' tendrá por ecuación $\beta z-x=0$.

Y por último, $C''=(1,\gamma,0)$ con $\gamma\neq 0$ puesto que $C''\in AB$ y $C''\neq A,B$.

Luego CC'' tendrá por ecuación $\gamma x-y=0$

Las tres rectas AA'', BB'' y CC'' se cortarán en un punto si y sólo si

$$0=\begin{vmatrix}0 & -1 & \gamma\\ \alpha & 0 & -1\\ -1 & \beta & 0\end{vmatrix}=-\alpha\begin{vmatrix}-1 & \gamma\\ \beta & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1 & \gamma\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1+\alpha\beta\gamma\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma=-1\Leftrightarrow(*)$$

Calculamos ahora las tres razones dobles:

Normalizamos la referencia (B,C,A’):

$A'=B+C\Leftrightarrow(0,1,-1)=(0,1,0)+(-1)(0,0,1)$, y

$A''=aB+bC\Leftrightarrow(0,1,\alpha)=a(0,1,0)+b(0,0,-1)\Leftrightarrow a=1,b=-\alpha$

$[B,C;A',A'']=\dfrac{1}{-\alpha}$.

Normalizamos la referencia (C,A,B’’):

$(1,0,-1)=(-1)(0,0,1)+1(1,0,0)$
Y determinamos las coordenadas de B' en esta referencia:
$(\beta,0,1)=(0,0,1)+\beta(1,0,0)\Rightarrow[C,A;B'',B']=\frac{1}{\beta}$
$(1,-1,0)=(1,0,0)+(-1)(0,1,0)$
$(1,\gamma,0)=a(1,0,0)+b(0,-1,0)\Leftrightarrow a=1,b=-\gamma$
$\Rightarrow[A,B;C'',C']=\frac{1}{-\gamma}$
Así pues,
$(*)\Leftrightarrow -1=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma=-1$
$\Leftrightarrow -1=[B,C;A'',A']\cdot[C,A;B'',B']\cdot[A,B;C'',C']$
Tal y como queríamos ver.

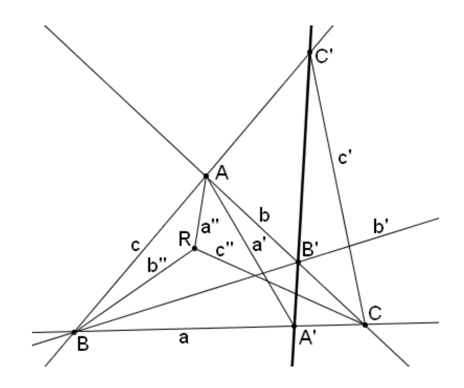
4.4.2 Corolario. Teorema de Ceva.
Sea ABC un triángulo y tres puntos $A'\in BC$, $B'\in AC$ y $C'\in AB$. Las AA', BB' y CC' serán concurrentes en un punto P si y sólo si

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}=1$$

Demostración.
Basta con aplicar el teorema anterior siendo r la recta del infinito. Entonces las tres rectas serán concurrentes si y sólo si
$-1=[B,C;A',A'']\cdot[C,A;B',B'']\cdot[A,B;C',C'']$
$=(B,C,A')\cdot(C,A,B')\cdot(A,B,C')$
$=\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{CA'}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{AB'}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{BC'}}=\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{AB'}}$
$\Leftrightarrow 1=\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}$

4.4.3 Teorema. (Dual del teorema 4.4.1)
Sea abc un triángulo en un plano proyectivo. Sean $A=b\cap c$, $B=a\cap c$ y $C=a\cap b$. Sean tres rectas a', b' y c' tales que $A\in a'$, $B\in b'$ y $C\in c'$. Los puntos $A'=a\cap a'$, $B'=b\cap b'$ y $C'=c\cap c'$ estarán alineados si y sólo si para cualquier punto R fuera del triángulo, y siendo $a''=AR$, $b''=BR$ y $c''=CR$, se cumple

$$[b,c;a',a'']\cdot[c,a;b',b'']\cdot[a,b;c',c'']=-1$$



Demostración.
Es el dual de 4.4.1.

4.4.4 Corolario.
Sean $A''=a\cap a''$, $B''=b\cap b''$ y $C''=c\cap c''$. Entonces
$[b,c;a',a'']=[b\cap a,c\cap a;a'\cap a,a''\cap a]=[B,C;A',A'']$, y de la misma forma
$[c,a;b',b'']=[C,A;B',B'']$ y $[a,b;c',c'']=[A,B;C',C'']$.

Y el teorema anterior es equivalente a

$$[B,C;A',A'']\cdot[C,A;B',B'']\cdot[A,B;C',C'']=-1$$

4.4.5 Teorema de Menelao.
Sea ABC un triángulo y tres puntos $A'\in BC$, $B'\in AC$ y $C'\in AB$. Los puntos A', B' y C' están alineados si y sólo si

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=-1$$

Demostración.
Tomamos un punto R que no pertenezca a AB, AC ni BC. Entonces los puntos $A''=AR\cap BC$, $B''=AC\cap BR$ y $C''=AB\cap CR$ cumplen las condiciones del teorema de Ceva y por tanto

$$\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA''}}{\overrightarrow{A''C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB''}}{\overrightarrow{B''A}}=1$$

Por el corolario 3.7.4, los puntos estarán alineados si y sólo si

$$[B,C;A'',A']\cdot[C,A;B'',B']\cdot[A,B;C'',C']=-1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overrightarrow{BA''}/\overrightarrow{CA''}}{\overrightarrow{BA'}/\overrightarrow{CA'}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB''}/\overrightarrow{AB''}}{\overrightarrow{CB'}/\overrightarrow{AB'}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC''}/\overrightarrow{BC''}}{\overrightarrow{AC'}/\overrightarrow{BC'}}=-1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overrightarrow{BA''}\cdot\overrightarrow{CA'}\overrightarrow{CB''}\overrightarrow{AB'}\overrightarrow{AC''}\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BA'}\overrightarrow{CA''}\overrightarrow{CB'}\overrightarrow{AB''}\overrightarrow{AC'}\overrightarrow{BC''}}=-1 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AC''}\overrightarrow{BA''}\overrightarrow{CB''}\overrightarrow{CA'}\overrightarrow{AB'}\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BC''}\overrightarrow{CA''}\overrightarrow{AB''}\overrightarrow{BA'}\overrightarrow{CB'}\overrightarrow{AC'}}=-1 \Leftrightarrow$$

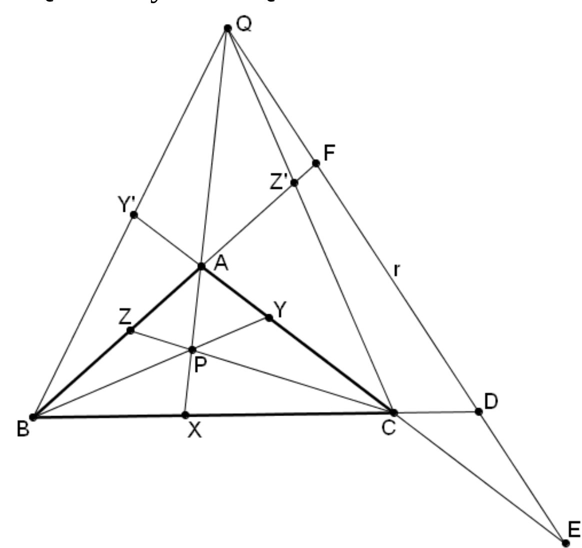
$$\frac{\overrightarrow{AC''}\overrightarrow{BA''}\overrightarrow{CB''}}{\overrightarrow{BC''}\overrightarrow{CA''}\overrightarrow{AB''}}\cdot\frac{\overrightarrow{CA'}\overrightarrow{AB'}\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BA'}\overrightarrow{CB'}\overrightarrow{AC'}}=-1 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AC''}\overrightarrow{BA''}\overrightarrow{CB''}}{\overrightarrow{C''B}\overrightarrow{A''C}\overrightarrow{B''A}}\cdot\frac{\overrightarrow{CA'}\overrightarrow{AB'}\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{A'B}\overrightarrow{B'C}\overrightarrow{C'A}}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{CA'}\overrightarrow{AB'}\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{A'B}\overrightarrow{B'C}\overrightarrow{C'A}}=-1$$

4.4.6 Teoremas de Ceva y Menelao.

Desarrollo del artículo "On the Theorems of Ceva and Menelaus", Autor: H. G. Green
The American Mathematical Monthly, Vol. 64, No. 5 (May, 1957), pp. 354-357

Sea ABC un triángulo y P un punto fuera del mismo. Sean $X = AP \cap BC$, $Y = BP \cap AC$ y $Z = CP \cap AB$.
Sea una recta r una recta que no pasa por A, B, C, P. Sean $F = AB \cap r$, $D = BC \cap r$ y $E = AC \cap r$.
Puesto que X, Y, Z son no colineales, al menos uno de ellos no está en r. Supongamos que $X \notin r$.
Sea $Q = AP \cap r$, $Y' = BQ \cap AC$ y $Z' = CQ \cap AB$.



$(Q,D,E,F)\overset{A}{\underset{=}{\wedge}}(X,D,C,B)$, $(Q,D,E,F)\overset{B}{\underset{=}{\wedge}}(Y',C,E,A)$ y $(Q,D,E,F)\overset{C}{\underset{=}{\wedge}}(Z',B,A,F)$.

Luego

$$[X,D;C,B]=[Y',C;E,A]=[Z',B;A,F]$$

Por otro lado

$$[X,D;C,B]\cdot[X,C;B,D]\cdot[X,B;D,C]=\frac{XC\cdot DB}{XB\cdot DC}\cdot\frac{XB\cdot CD}{XB\cdot CB}\cdot\frac{XD\cdot BC}{XC\cdot BD}=-1$$

$$[X,D;C,B]=[Y',C;E,A]\Rightarrow[X,C;B,D]=[Y',E;A,C]$$

$$[X,D;C,B]=[Z',B;A,F]\Rightarrow[X,B;D,C]=[Z',F;B,A]$$

Luego

$$[X,D;C,B]\cdot[Y',E;A,C]\cdot[Z',F;B,A]=-1 \qquad (*)$$

También vemos que

$$(Y',Y,A,C)\overset{B}{\underset{=}{\wedge}}(Q,P,A,X)\overset{C}{\underset{=}{\wedge}}(Z',Z,A,B)\Rightarrow[Y',Y;A,C]=[Z',Z;A,B]\Rightarrow$$

$$\frac{Y'A\cdot YC}{Y'C\cdot YA}=\frac{Z'A\cdot ZB}{Z'B\cdot ZA}\Rightarrow\frac{Y'A\cdot Z'B}{Y'C\cdot Z'A}=\frac{YA\cdot ZB}{YC\cdot ZA}$$

Imponiendo la recta r como recta del infinito tenemos que

$$-1=[X,D;C,B]\cdot[Y',E;A,C]\cdot[Z',F;B,A]=$$

$$=\frac{XC}{XB}\cdot\frac{Y'A}{Y'C}\cdot\frac{Z'B}{Z'A}$$

Y por tanto

$$-1=\frac{XC}{XB}\cdot\frac{Y'A}{Y'C}\cdot\frac{Z'B}{Z'A}=\frac{XC}{XB}\cdot\frac{YA}{YC}\cdot\frac{ZB}{ZA}$$

$$=\frac{XC}{XB}\cdot\frac{ZB}{ZA}\cdot\frac{YA}{YC}=\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA}\cdot\frac{YA}{YC}$$

o en la forma del teorema de Ceva:

$$1=\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA}\cdot\frac{AY}{YC}$$

Puesto que las rectas BY’, CZ’ y AX concurren en el punto Q, podemos aplicar el teorema de Ceva para garantizar que

$$1=\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ'}{Z'A}\cdot\frac{AY'}{Y'C}$$

Desarrollamos (*):

$$-1=[X,D;C,B]\cdot[Y',E;A,C]\cdot[Z',F;B,A]=$$

$$=\frac{XC\cdot DB}{XB\cdot DC}\cdot\frac{Y'A\cdot EC}{Y'C\cdot EA}\cdot\frac{Z'B\cdot FA}{Z'A\cdot FB}$$

$$=\frac{XC\cdot Z'B}{XB\cdot Z'A}\cdot\frac{Y'A\cdot EC}{Y'C\cdot EA}\cdot\frac{DB\cdot FA}{DC\cdot FB}$$

$$=\frac{XC\cdot BZ'}{XB\cdot Z'A}\cdot\frac{AY'\cdot EC}{Y'C\cdot EA}\cdot\frac{DB\cdot FA}{DC\cdot FB}=\frac{EC\cdot DB\cdot FA}{EA\cdot DC\cdot FB}\Leftrightarrow$$

$$1=\frac{CE\cdot AF\cdot BD}{EA\cdot FB\cdot DC}$$

Que es el teorema de Menelao.

5 Planos proyectivos axiomáticos.

5.1 Construcción.

5.1.1 Definición. Plano proyectivo incidental.

Un plano proyectivo incidental IP_2 es un conjunto de puntos y una colección de conjuntos de puntos llamados “rectas” cumpliendo los siguientes axiomas, llamados “**Axiomas de incidencia**”:

Axioma PP1: Por cada dos puntos diferentes pasa una única recta.
Axioma PP2: Dos rectas cualesquiera tienen, al menos, un punto en común.
Axioma PP3: Existen tres puntos no alineados.
Axioma PP4: Toda recta tiene al menos tres puntos.

Para evitar cuadriángulos completos degenerados exigiremos además el cumplimiento del siguiente axioma:

Axioma PP5: Axioma de Fano (ver 5.2.4).

5.1.2 Proposición.

En un plano proyectivo incidental, dos rectas diferentes tienen un único punto en común.

Demostración. Si $r \neq s$, por PP2 tendrán al menos un punto P en común. Supongamos que tienen otro punto $Q \neq P$ en común. Entonces, aplicando PP1, se deduce que $r = s$, contradiciendo la hipótesis.

5.1.3 Proposición.

Sean dos puntos P, Q y dos rectas r, s de un plano proyectivo.
Si $P \in r, Q \in r, P \in s, Q \in s$ entonces $P = Q$ o $r = s$.

Demostración. Si $P \neq Q$, por el axioma PP1 tendremos $r = s$, y si $r \neq s$, por el axioma PP2 tendremos que $P = Q$.

5.1.4 Proposición.

En todo plano proyectivo incidental, existen al menos dos rectas diferentes.

Demostración.
Por el axioma PP3, existirán tres puntos A, B, C no alineados. Consideremos las rectas AB y AC. Han de ser diferentes, pues de lo contrario $A, B, C \in AB$ contradiciendo la hipótesis.

5.1.5 Proposición.

Dado un punto P de un plano proyectivo, existirá al menos una recta r que no pasa por P.

Demostración.

Por el axioma PP3 existirán tres puntos A, B y C no alineados. Supongamos que P es uno de ellos, por ejemplo P=A. Entonces $P \notin BC$, pues de lo contrario los tres puntos estarían alineados.
Si P no es ninguno de los tres puntos, supongamos que $P \in AB$ y $P \in AC$. Entonces $AB = AP = AC$, y los tres puntos A, B y C estarían alineados. Luego P no pertenecerá al menos a una de las dos rectas.

5.1.6 Proposición.
Los axiomas PP3 y PP4 se pueden sustituir por el axioma PP3b:

Axioma PP3b: Existen cuatro puntos, no tres de ellos colineales.

Demostración:

Primera parte: PP1,PP2, PP3 y PP4 $\Rightarrow$PP3b:

Por 5.1.4 existirán dos rectas diferentes r y s. Por el axioma PP2 las dos rectas se cortarán en un punto P. No puede haber ningún otro punto de corte porque de lo contrario serían iguales.
Por PP4 al menos existirán otros dos puntos A y B en r que no sean P, y dos puntos C y D en s que tampoco sean P. Veamos que los puntos A, B, C y D forman un cuadriángulo completo. En efecto, supongamos que tres de ellos están alineados, por ejemplo A, B y C. Entonces $C \in \overleftrightarrow{AB} = r$, pero también $P \in \overleftrightarrow{AB}$, luego $s = \overleftrightarrow{PC} = \overleftrightarrow{AB} = r$ contradiciendo la hipótesis. De la misma forma de demuestra la imposibilidad de obtener cualquier otro grupo de tres puntos alineados.

Segunda parte: PP1, PP2 y PP3b $\Rightarrow$PP3 y PP4:

Se cumple PP3: Existen tres puntos no alineados.

Por PP3b, existirán cuatro puntos A, B, C y D para los cuales ningún grupo de tres está alineado. Basta tomar los puntos A, B, C o cualquier otro grupo de tres.

Se cumple PP4: Toda recta contiene al menos tres puntos.

Sea r una recta. Por el axioma PP3b, existirán cuatro puntos A, B, C y D para los cuales ningún grupo de tres pertenece a la misma recta, en particular a r.
a) Supongamos que ninguno de los cuatro puntos pertenece a r. Consideremos las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$. Existen por PP1, y cada una de ellas corta a r por PP2, es decir, existen $P \in \overleftrightarrow{AB} \cap r$, $Q \in \overleftrightarrow{AC} \cap r$ y $R \in \overleftrightarrow{AD} \cap r$. Estos tres puntos son diferentes, en efecto, si por ejemplo $P = Q$ tendríamos $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{AQ} = \overleftrightarrow{AD}$, y por tanto los puntos A, C y D serían colineales, contradiciendo la hipótesis. Luego hemos encontrado tres puntos diferentes en r.
b) Supongamos que sólo uno de ellos pertenece a r. Pongamos que $A \in r$ y $B, C, D \notin r$. Consideremos las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{BD}$. Cada una de ellas cortará a r por el axioma P2, es decir, existirán P, Q y R tales que $P \in \overleftrightarrow{BC} \cap r$, $Q \in \overleftrightarrow{CD} \cap r$ y $R \in \overleftrightarrow{BD} \cap r$.

Estos tres puntos serán diferentes, puesto que si, por ejemplo, $P = R$ tendríamos $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{BP} = \overleftrightarrow{BR} = \overleftrightarrow{BD}$, y los puntos B, C y D estarían alineados, contradiciendo la hipótesis.
c) Supongamos que dos de ellos pertenecen a r, pongamos que $A, B \in r$ y $C, D \notin r$.
Consideremos la recta $\overleftrightarrow{CD}$, que por el axioma PP2 cortará la recta r en un punto $P \in \overleftrightarrow{CD} \cap r$. El punto P no puede ser ni A ni B, puesto que si por ejemplo $P = A$ tendríamos $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{CP} = \overleftrightarrow{CA}$ y por tanto los puntos C, D y A estarían alineados.

5.1.7 Proposición.
Todo plano proyectivo es un plano incidental.

Demostración. PP1$\Rightarrow$H1.1, PP1$\Rightarrow$H1.2, PP4$\Rightarrow$H1.3a, PP3$\Rightarrow$H1.3b

5.1.8 Proposición.
Por cada punto de un plano proyectivo pasan al menos tres rectas.

Demostración. Sea un punto P. Por el axioma PP3b existirán 4 puntos A, B, C y D para los cuales ningún grupo de tres está alineado. Supongamos que P no es ninguno de los cuatro. En el conjunto de rectas $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$, $\overleftrightarrow{PD}$ no hay tres iguales, pues si por ejemplo $\overleftrightarrow{PA} = \overleftrightarrow{PB} = \overleftrightarrow{PC}$ los tres puntos A, B y C estarían alineados, contradiciendo PP3b. Luego al menos hay tres diferentes, como queríamos ver.
Si P es alguno de los cuatro puntos, pongamos $P = A$, entonces las rectas $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ y $\overleftrightarrow{PD}$ son diferentes, pues si por ejemplo $\overleftrightarrow{PB} = \overleftrightarrow{PC}$, los tres puntos A, B y C estarían alineados.

5.1.9 Proposición.
El plano proyectivo real $P_2(IR)$ cumple los axiomas de plano proyectivo.

Demostración.
Axioma PP1: Ver 2.2.3. Axioma PP2: Ver 2.2.5. Axioma PP3b: Ver 2.2.6. Axioma PP5: Ver 2.2.6.

5.1.10 Definición. Planos proyectivos papianos y arguesianos.
En el desarrollo de la geometría proyectiva tienen un especial protagonismo los dos postulados siguientes:

> **Axioma PP6:** Postulado de Pappus (ver 5.4.1).
> **Axioma PP7:** Postulado de Desargues (ver 5.5.1).

Un **plano proyectivo papiano** (PPP) será aquel plano proyectivo incidental (es decir, que cumpla los axiomas PP1 a PP5) y que además cumpla el Postulado de Pappus (PP6).

Un **plano proyectivo arguesiano** (PPA) será aquel plano proyectivo incidental que además cumpla el Postulado de Desagues (PP7).

Todo plano papiano es un plano arguesiano: PP6 (Pappus) $\Rightarrow$PP7 (Desargues)

Otros hechos notables son:

PP7 (Desargues) se cumple en cualquier espacio de dimensión ≥ 3.

Todo plano analítico $P_2(K)$ es papiano si y sólo si K es conmutativo, es decir, es un cuerpo.

Todo plano analítico $P_2(K)$ es arguesiano, cuando K no es conmutativo.

Todo plano arguesiano finito es papiano.

5.2 Conjuntos armónicos.

5.2.1 Definición. Triángulo.

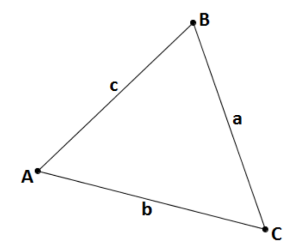
Definimos por triángulo a cualquier conjunto ordenado (A, B, C) de tres puntos no colineales.

5.2.2 Definición. Trilátero.

Definimos por trilátero a cualquier conjunto ordenado (a, b, c) de tres rectas no concurrentes (es decir, que pasan por un mismo punto).

5.2.3 Observación.

Todo triángulo (A, B, C) determina un trilátero (a, b, c) donde $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$.
De la misma forma, todo trilátero (a, b, c) determina el triángulo (A, B, C) donde $A = b \cap c$, $B = a \cap c$ y $C = a \cap b$.
Además, de este triángulo volvemos a obtener el trilátero original (a, b, c).



5.2.4 Definición. Cuadriángulo completo.

Un cuadriángulo completo es un conjunto ordenado de cuatro puntos (A, B, C, D) llamados "**vértices**" tales que ningún grupo de tres es colineal.
Las seis rectas que determinan se llaman "**lados**": AB, AC, AD, BC, BD y CD.
Se dice que dos lados son **opuestos** si no pasan por el mismo vértice. Hay tres parejas de lados opuestos: (AB,CD), (AD,BC) y (AC, BD). En caso contrario hablaremos de lados contiguos o adyacentes. Cada lado tiene un único lado opuesto asociado.

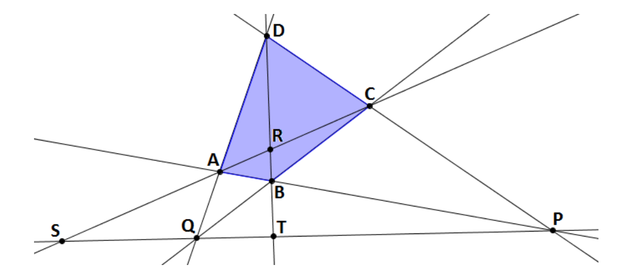
Las tres intersecciones de lados opuestos se llaman **puntos diagonales** del cuadriángulo:

$$P = AB \cap CD,\ Q = AD \cap BC,\ R = AC \cap BD$$

Imponemos la condición de que los tres puntos diagonales no estén alineados, es decir, formen un triángulo llamado "**triángulo diagonal**" asociado al cuadriángulo completo. Esta condición se llama **Axioma de Fano (PP7)**.

Por último, los lados AD y DB, al cortar PQ, determinarán los puntos S y T:

$$S = PQ \cap AD,\ T = PQ \cap BD$$



5.2.5 Teorema.
Sea un plano proyectivo analítico $P_2(K)$ sobre un cuerpo K, las afirmaciones siguientes son equivalentes:
a) Los puntos diagonales de todo cuadriángulo completo no son colineales.
b) Existe un cuadriángulo completo cuyos puntos diagonales no son colineales.
c) La característica de K es distinta de 2.

Demostración.
Consideremos los puntos $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$ y $D=(1,1,1)$.
Forman un sistema de referencia, por lo que cualquier grupo de tres puntos no son colineales.

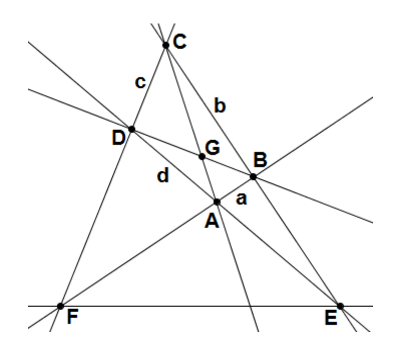
$$\left.\begin{array}{l} AB: z=0 \\ CD: x=y \end{array}\right\} \Rightarrow P=AB\cap CD=(1,1,0)$$
$$\left.\begin{array}{l} AD: y=z \\ BC: x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q=AD\cap BC=(0,1,1)$$
$$\left.\begin{array}{l} AC: y=0 \\ BD: x=z \end{array}\right\} \Rightarrow R=AC\cap BD=(1,0,1)$$

Luego $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1)-1(-1)=1+1=0 \Leftrightarrow 1+1=0$

Sea el punto $P'=QR\cap AB$
$$\left.\begin{array}{l} AB: z=0 \\ QR: x+y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow P'=BD\cap PQ=(1,-1,0)$$

Los puntos P, Q y R estarán alineados si y sólo si $P=P' \Leftrightarrow 1=-1$, comparando sus coordenadas.

5.2.6 Definición. Cuadrilátero completo.
Un cuadrilátero es un conjunto ordenado de cuatro rectas (a, b, c, d) llamadas “lados”, tales que ningún grupo de tres sea concurrente.
Las cuatro rectas al cortarse determinan seis puntos llamados “vértices”
$$A=a\cap d,\ B=a\cap b,\ C=c\cap b,\ D=c\cap d,\ E=d\cap b,\ F=a\cap c$$



Dos vértices son opuestos si no pertenecen al mismo lado; así, D y B son opuestos; también A y C son opuestos, lo mismo que E y F.

Cada pareja de vértices opuestos determina una recta diagonal. Las rectas diagonales son DB, AC y EF.

5.2.7 Observación.
Todo cuadriángulo $\{A,B,C,D\}$ determina varios cuadriláteros: El $\{\overline{AB},\overline{BC},\overline{CD},\overline{DA}\}$, aunque también podría escogerse el $\{\overline{AC},\overline{BC},\overline{BD},\overline{DA}\}$ o el $\{\overline{AB},\overline{BD},\overline{CD},\overline{AC}\}$, de ahí que a veces se disloque el lenguaje entreverando términos de cuadrivértices en un ambiente referido a cuadriláteros o viceversa.

5.2.8 Proposición.
En todo plano proyectivo existen los cuadriláteros completos.

Demostración. Por PP3b existirán cuatro puntos A, B, C y D para los cuales ningún grupo de tres está alineado. Veamos que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son un cuadrilátero completo. Supongamos que un grupo de tres tienen un punto en común, por ejemplo las tres primeras $P \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Supongamos que $P \neq A,B$. La recta $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{AD}$, luego los puntos A, B y D están alineados, contradiciendo la hipótesis. Si P=A, $\overleftrightarrow{PB} = \overleftrightarrow{PD}$ y igualmente los puntos A, B y D están alineados. De la misma forma no se puede dar el caso P=B. De la misma forma se demuestra que ningún otro grupo de tres rectas tienen un punto en común.

5.2.9 Definición. Straight fan.
Un “Straight fan” es un plano incidental en el cual todos los puntos excepto uno están contenidos en una misma recta.

5.2.10 Teorema. “straight fan” es la única excepción.
Todo plano incidental que cumpla el postulado elíptico, o bien es un “straight fan” o bien contiene un cuadrilátero completo, en cuyo caso es un plano proyectivo.

Demostración. Sea un plano incidental, y supongamos que no contiene cuadriángulos. Supongamos que sólo contiene tres puntos A, B y C. Por el axioma I3 no podrán ser colineales, y por el axioma I1 los puntos A y B pasan por una recta, luego tenemos un “straight fan”.
Sea un plano incidental con al menos cuatro puntos A, B, C y D. Puesto que no existen cuatriángulos, al menos tres de estos puntos deberán pasar por una misma recta. Pongamos que $A,B,C \in r$.
Por el axioma I3, existirán tres puntos no alineados, luego al menos uno de estos tres puntos no puede pertenecer a r, por lo tanto existirá un punto $E \notin r$.
Veamos que entonces el punto D deberá pertenecer a r, es decir, no pueden existir dos puntos $P \neq Q$ fuera de la recta.
Supongamos por el contrario que existen dos puntos $P \neq Q$ fuera de la recta r. Por el postulado elíptico, la recta $s = \overleftrightarrow{PQ}$ y r se cortarán en un punto.
Podemos suponer que ese punto no es ni B ni C.

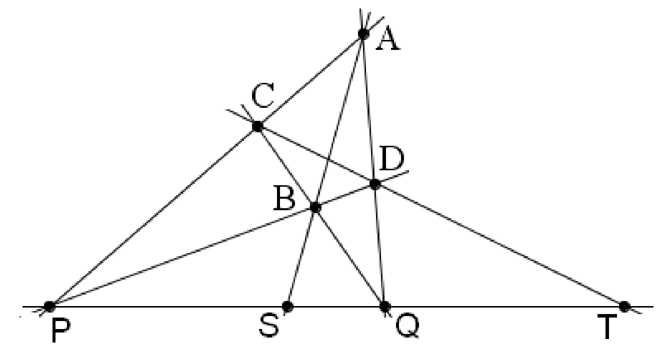
Consideremos los puntos B, C, P y Q. Puesto que no existen cuadriángulos, al menos tres de ellos serán estarán alineados, lo cual es contradictorio:
Si P, Q y C están alineados entonces $C \in s$ y por tanto C será el punto de intersección entre r y s, contradiciendo la hipótesis. De la misma forma, si $B \in \overleftrightarrow{PQ} \Rightarrow \{B\} = r \cap s$.
Cualquier otra combinación nos lleva igualmente a contradicción.
Así pues, sólo un punto puede estar fuera de la recta, tal y como queríamos demostrar.

Veamos que todo plano incidental cumpliendo el postulado elíptico y la existencia de cuadriángulos es un plano proyectivo. En efecto, el axioma PP1 es el axioma I1. El postulado elíptico implica PP2, y el axioma PP3b es precisamente la existencia de cuadriláteros completos.

5.2.11 Definición. Cuaterna armónica. Conjugado armónico. Cuarto armónico.
Se dice que cuatro puntos diferentes y ordenados (P, Q, S, T) forman una **cuaterna armónica** cuando existe un cuadriángulo completo A, B, C, D que tiene dos lados opuestos sobre P, otros dos lados opuestos sobre Q, mientras que el tercer par de lados opuestos está individualmente sobre S y T.
El punto S es llamado el **conjugado armónico** de T con respecto a P y Q.
Esta relación se indicará escribiendo $H(P,Q;S,T)$.
También diremos que T es el **cuarto armónico** asociado a los puntos P, Q y S.
Por el significado mismo de esta definición, los puntos P y Q son intercambiables. Otro tanto puede decirse de los puntos S y T del segundo par, pero todavía no estamos en condiciones de afirmar que los pares P, Q y S, T son intercambiables entre ellos.

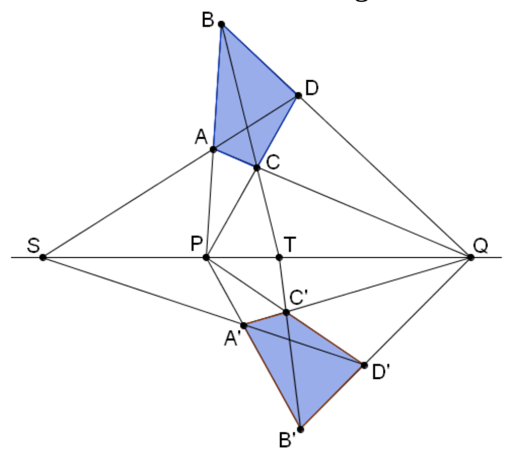
5.2.12 Proposición. Existencia y determinación del cuarto armónico.
Supongamos que tenemos tres puntos P, Q, S en una recta y queremos determinar el cuarto armónico T.

Tomamos A y B alineados con S fuera de la recta y construimos el cuadrilátero completo: Trazamos las rectas $\overleftrightarrow{BQ}$, $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{AP}$, Determinamos los puntos $D = \overleftrightarrow{AQ} \cap \overleftrightarrow{PB}$ y $C = \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{BP}$. El punto T será la intersección de la diagonal $\overleftrightarrow{CD}$ con la recta inicial. Este punto no depende de los puntos A y B escogidos, como veremos en la siguiente proposición.



5.2.13 Proposición.
Sean ABCD y A'B'C'D' dos cuadriángulos completos con puntos diagonales comunes P y Q. Si los lados BC y B'C' de estos cuadriángulos se intersecan en el punto S de la recta PQ, sus lados AD y A'D' se cortarán en el punto T de la misma.

Demostración.
Esta demostración se basará en el teorema de Desargues.

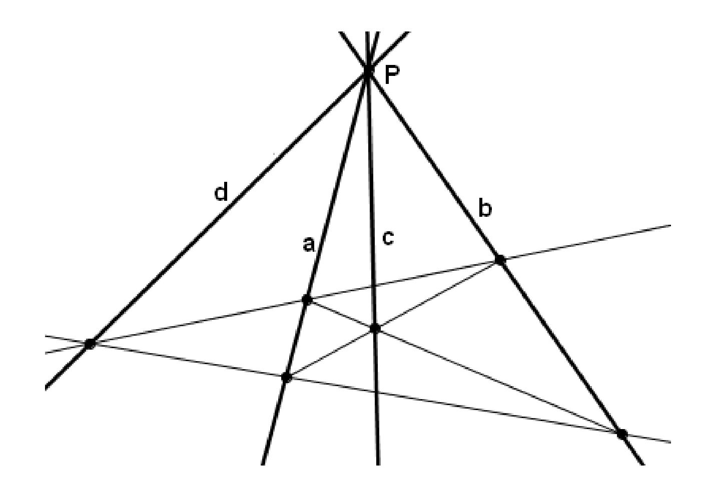


Consideremos los triángulos ABC y A'B'C'. La recta PQ es eje de perspectiva de los dos triángulos, pues sus lados respectivos se cortan en los puntos P, T y Q de dicha recta. Por lo tanto, aplicando el teorema de Desargues, los dos triángulos tendrán un centro de perspectiva O.
Los triángulos BCD y B'C'D' tienen también la recta PQ como eje de perspectiva, pues sus lados respectivos se cortan en los mismos puntos P, T y Q, por lo que aplicando nuevamente el teorema de Desargues, los dos triángulos tendrán un centro de perspectiva O'. Los puntos O y O' coinciden, pues $O = \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'} = O'$.
Por lo tanto los triángulos ABD y A'B'D' tienen un centro de perspectiva O, luego aplicando el teorema de Desargues, tendrán un eje de perspectiva, que será la recta PQ, pues pasa por los puntos P y Q, luego la intersección de los lados AD y A'D' cortará en un punto S de la misma recta.

5.2.14 Proposición.
Si S y T son par armónico conjugado de P y Q, entonces P y Q son un par armónico conjugado de S y T.

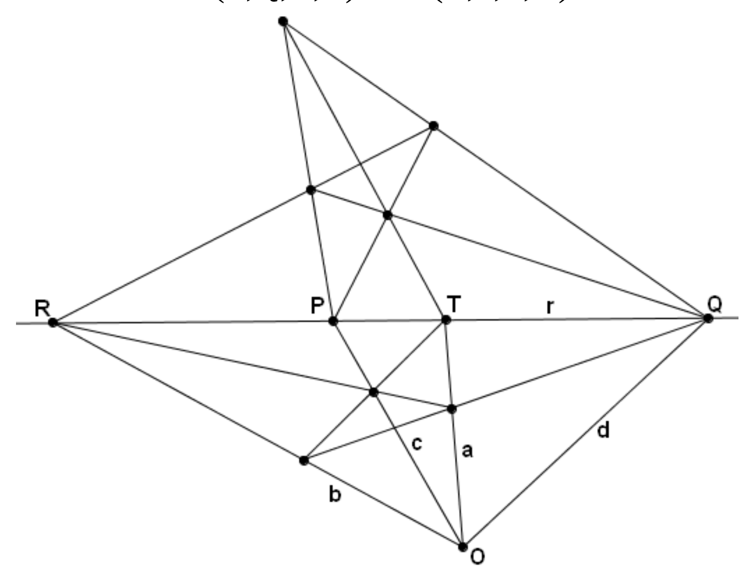
Demostración.

5.2.15 Definición. Conjunto armónico de rectas. (definición dual de ????)
Se dice que cuatro rectas a, b, c, d concurrentes en un punto P forman un conjunto armónico de rectas cuando existe un cuadriángulo completo que tiene dos de sus vértices opuestos sobre a, otros dos vértices opuestos sobre b, mientras que el tercer par de vértices opuestos está individualmente sobre c y d.
A la recta c se le llama conjugada armónica de d con respecto de a y b.
Esta relación se indicará escribiendo $H(a,b;c,d)$.



5.2.16 Proposición.
Un conjunto armónico de puntos sobre una recta r es proyectado desde cualquier punto O, que no está sobre r, por un conjunto armónico de rectas:

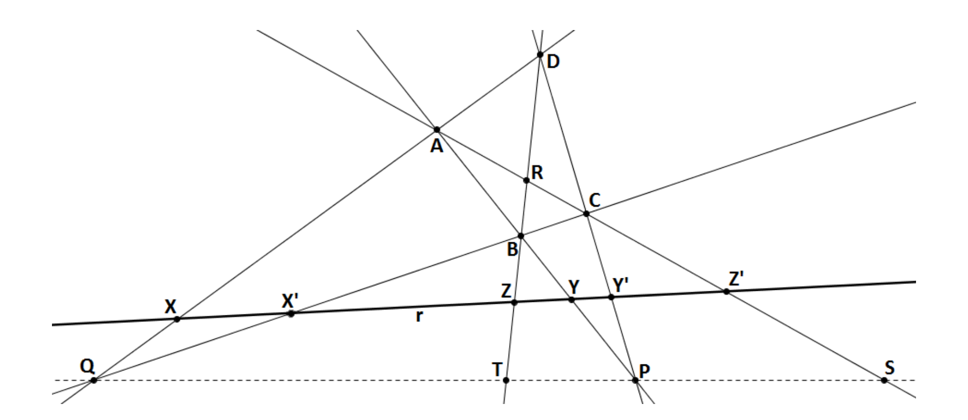
$$H(P,Q;R,T) \Rightarrow H(a,b;c,d)$$



5.2.17 Proposición. (Proposición dual de ????)
Un conjunto armónico de rectas concurrentes sobre un punto P es cortado por cualquier recta que no está sobre P, en un conjunto armónico de puntos:

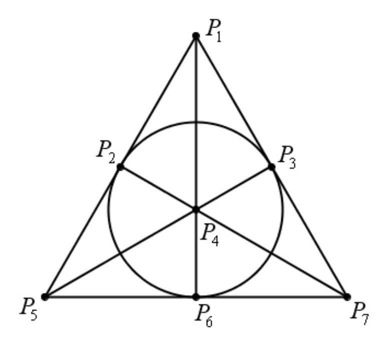
$$H(a,b;c,d) \Rightarrow H(P,Q;R,T)$$

5.2.18 Definición. Conjunto cuadrangular.
Diremos que seis puntos (no necesariamente distintos) en una recta r forman un conjunto cuadrangular, y lo representaremos $\Omega(XYZ, X'Y'Z')$ si existe un cuadriángulo completo con vértices exteriores a r de modo que X, Y, Z sean las intersecciones con r de tres lados y X', Y', Z' sean las intersecciones con los lados opuestos correspondientes.


D
A
R
C
B
X
X'
Z
Y
Y'
Z'
r
Q
T
P
S

5.3 Planos proyectivos finitos.

5.3.1 Definición. El plano de Fano.
El plano de Fano es el plano proyectivo más pequeño que se puede construir. Consta de 7 puntos y siete rectas, con las siguientes relaciones:



Es fácil comprobar que es el plano proyectivo más pequeño que se puede construir.

Observamos en este plano unas propiedades interesantes:

Hay tantas rectas como puntos.
Todas las rectas contienen el mismo número de puntos.
Por cada punto pasan el mismo número de rectas.

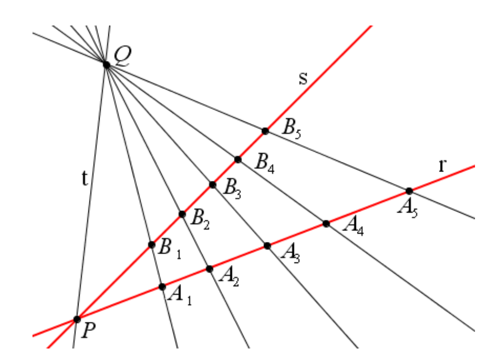
Estas propiedades se pueden generalizar a cualquier plano proyectivo finito.

5.3.2 Proposición.
En todo plano proyectivo existe un número n para el cual todas las rectas tienen n puntos y por cada punto del plano pasan n rectas.

Demostración.
Sean r y s dos rectas. Sea P su punto de intersección. Sea t una tercera recta que pase por P diferente de r y s. Sea $Q \neq P$ un punto de t.

Sean $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ los puntos de r diferentes de P. Determinamos las rectas $\{QA_1, QA_2, ..., QA_m\}$. Estas rectas serán todas diferentes, pues $QA_i = QA_j \Rightarrow Q \in A_i A_j = r$ absurdo. Determinamos ahora los puntos

$$\{B_1 = s \cap QA_1, B_2 = s \cap QA_2, ..., B_m = s \cap QA_m\} \subset s$$



Todos estos puntos serán diferentes, pues $B_i = B_j \Rightarrow QA_i = QB_i = QB_j = QA_j$ absurdo.

Luego el número de puntos en r será mayor o igual que el número de puntos de s. Este mismo razonamiento se puede realizar para los puntos de s, con lo que llegamos a la conclusión de que ambas rectas tienen el mismo número de puntos.

Sea ahora P un punto y sea r una recta que no pasa por P. Sean $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ todos los puntos de la recta r. Con ellos determinamos las rectas $\{PA_1, PA_2, ..., PA_n\}$, que serán todas diferentes, pues $PA_i = PA_j \Rightarrow A_i = A_j$.
Por otro lado, si s es una recta que pasa por P, su intersección con r será alguno de los puntos A_i anteriores, luego por el punto P pasarán n rectas diferentes.

5.3.3 Definición. Orden de un plano proyectivo finito.
Definimos el orden de un plano proyectivo finito como $n-1$, donde n es el número de puntos en cada recta o el número de rectas que pasan por cada punto.

5.3.4 Proposición.
Sea un plano proyectivo de orden n. Entonces el número de puntos y el número de rectas será $n^2 + n + 1$

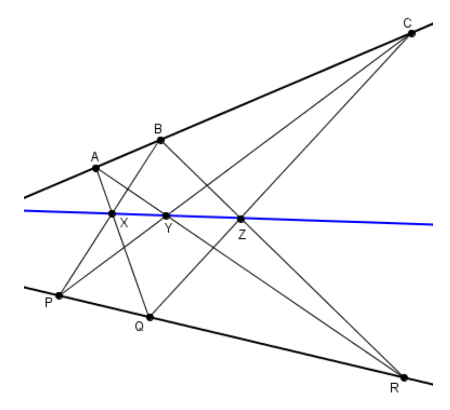
Demostración.

5.4 Postulado de Pappus.

Aunque se considera a Girard Desargues (1591-1661) como el padre de la geometría proyectiva, uno de los teoremas que más juego ha dado en este campo fue enunciado siglos antes por Pappus de Alejandría, alrededor del año 250 DC. y utilizando para su demostración argumentos esencialmente euclídeos.

5.4.1 Definición. El postulado de Pappus.

El Postulado de Pappus (PP6) afirma lo siguiente: En un plano proyectivo, dadas dos ternas (A,B,C) y (P,Q,R) de puntos alineados, los puntos $X = AQ \cap PB$, $Y = AR \cap PC$, $Z = BR \cap QC$ están alineados. Llamaremos **recta de Pappus** a la recta que los contiene.



5.4.2 Teorema.

El Postulado de Pappus es equivalente a la conmutatividad de las homologías que comparten centro y eje.

Demostración.

$\Rightarrow$Supongamos el Postulado de Pappus.

Sean f y g dos homologías de centro O y eje t. Queremos ver que $f \circ g = g \circ f$.

Sea r una recta que pasa por O, $r \neq t$.

Sea $A \in r, A \neq O$.

Sea $B = f(A)$, y $C = g(B)$.

Entonces $g \circ f$ será la única homología que transforma A en C.

Sea ahora un punto $X \notin r$, y sea $s = XO$.

Sabemos que para la determinación de $(g \circ f)(X)$ sólo necesitamos la pareja A, C=g(f(A)):

Determinamos $S = AX \cap t$ y después $(g \circ f)(X) = CS \cap s$ (rectas rojas)

Por otro lado, para la determinación de $(f \circ g)(X)$ calcularemos $g(X)$ y luego $f(g(X))$:

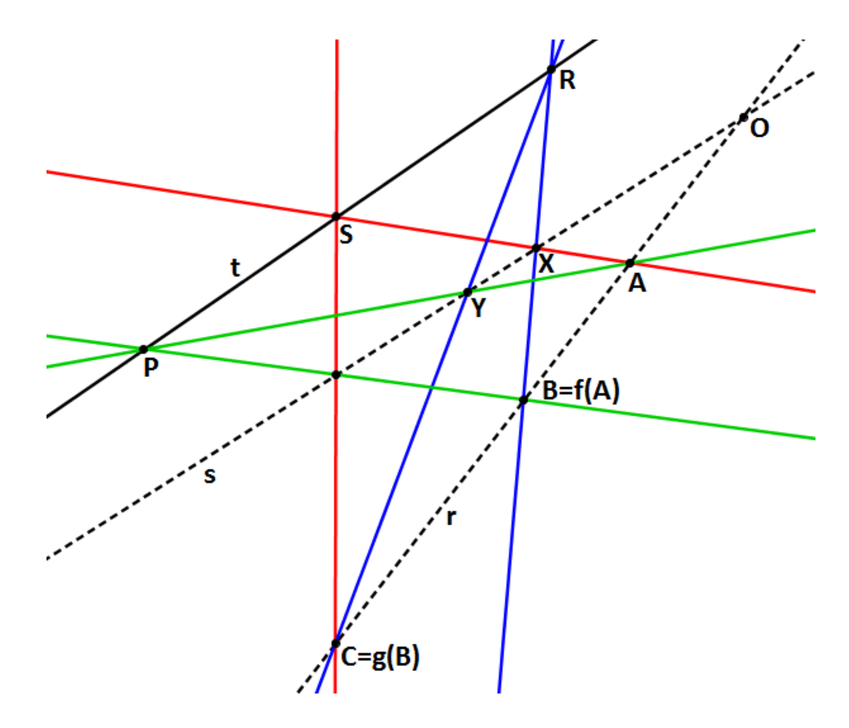
Para la determinación de $g(X)$ nos apoyamos en B y $C = g(B)$:

$R = BX \cap t \rightarrow g(X) = Y = RC \cap s$ (líneas azules).

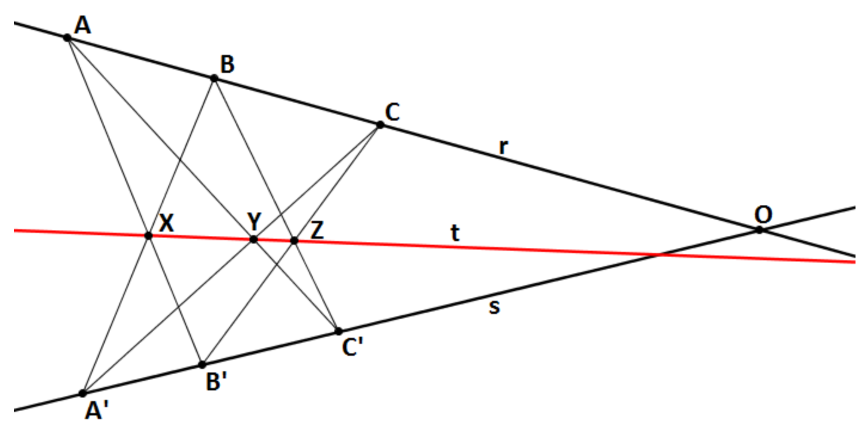
Para la determinación de $f(g(X)) = f(Y)$ nos apoyamos en A y $B = f(A)$:

$P = AY \cap t \rightarrow f(Y) = PB \cap s$ (líneas verdes).

Pero suponiendo el Postulado de Pappus $PB \cap s = CS \cap s$, es decir $f(g(X)) = g(f(X))$

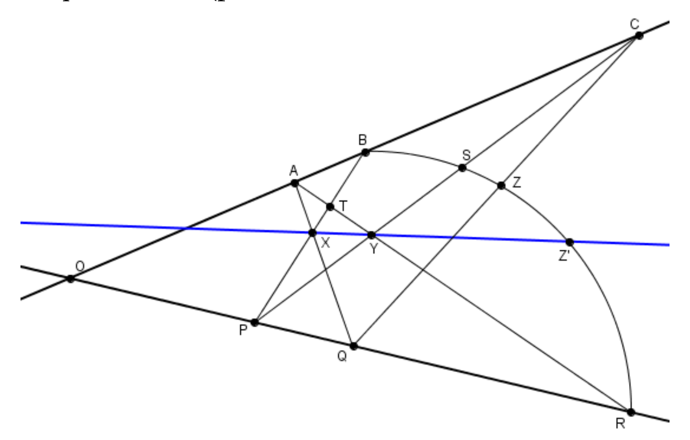


$\Leftarrow$El razonamiento es similar. Supongamos ahora la conmutatividad de las homologías que comparten un centro O y un eje t.
Sean dos rectas r y s distintas, $A, B, C \in r - s$ y $A', B', C' \in s - r$.
Sea $O = r \cap s$.
Sean los puntos $X = AB' \cap BA'$, $Y = AC' \cap CA'$ y $Z = BC' \cap CB'$. Sea $t = YZ$.
Queremos ver que $X \in t = XY$.
Consideremos ahora tres homologías f, g, h en el plano, todas compartiendo el mismo centro O y el mismo eje t, caracterizadas cada una por $f(A) = B$, $g(B) = C$ y $h(A) = C$.
Puesto que $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = g(B) = C = h(A)$, tenemos que $h = g \circ f$.
Determinemos $h(C')$: $Y = AC' \cap t \rightarrow h(C') = YC \cap s = A'$
Pero $h(C') = (g \circ f)(C') = (f \circ g)(C')$, pues suponemos la conmutatividad.
Calculemos la composición $= (f \circ g)(C') = f(g(C'))$.
En primer lugar $g(C') : Z = BC' \cap t \rightarrow g(C') = CZ \cap s = B'$
En segundo lugar $f(g(C')) = f(B') : X = B'A \cap t \rightarrow f(B') = BX \cap s = A'$
Luego $YC \cap s = BX \cap s$, y por tanto el punto X es un punto fijo por la homología (????), y por tanto pertenece al eje, es decir $X \in YZ$, y se cumple el Postulado de Pappus.



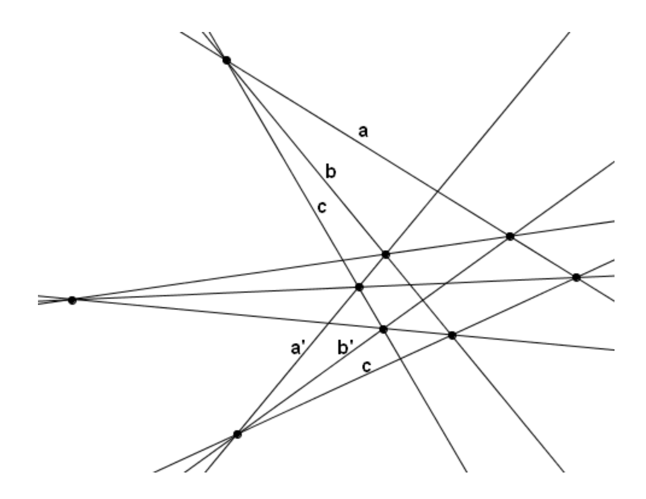
5.4.3 Teorema.
Todo plano fundamental es papiano.

Demostración.
Sean $O = AB \cap PQ$, $Z' = XY \cap BR$, $S = PC \cap BR$, y $T = AR \cap BP$.
Queremos demostrar que $Z = Z'$ (pues entonces $Z = Z' = XY \cap BR \in XY$)



La perspectiva de centro C, $\pi_C : BR \to OR$ pasa $(B, S, R, Z) \mapsto (O, P, R, Q)$,
la perspectiva de centro A, $\pi_A : OR \to PB$ pasa $(O, P, R, Q) \mapsto (B, P, T, X)$,
y la perspectiva de centro Y, $\pi_Y : PB \to BR$ pasa $(B, P, T, X) \mapsto (B, S, R, Z')$.
Luego la composición $\pi_Y \circ \pi_A \circ \pi_C : BR \to BR$ pasa $(B, S, R, Z) \mapsto (B, S, R, Z')$, por lo tanto conserva el símplex (B, S, R), y en consecuencia es la identidad. Pero pasa Z a Z', luego Z=Z'.

5.4.4 Teorema. Teorema de Brianchon.
Dados dos haces de rectas (a, b, c) y (a', b', c'), las diagonales formadas por lados opuestos son colineales.



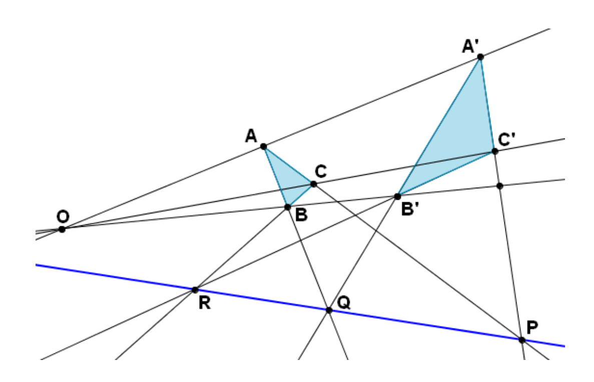
Demostración.
Es el dual del Teorema de Pappus.

5.5 Postulado de Desargues.

5.5.1 Postulado. Postulado de Desargues. Planos arguesianos.

El postulado de Desargues (PP7) afirma lo siguiente: Si dos triángulos tienen un centro de perspectiva, es decir, existe $O = AA' \cap BB' \cap CC'$, entonces los puntos $P = AC \cap A'C'$, $Q = AB \cap A'B'$ y $R = BC \cap B'C'$ están alineados.

Un plano en el que se cumple el Postulado de Desargues se llama **plano arguesiano**.



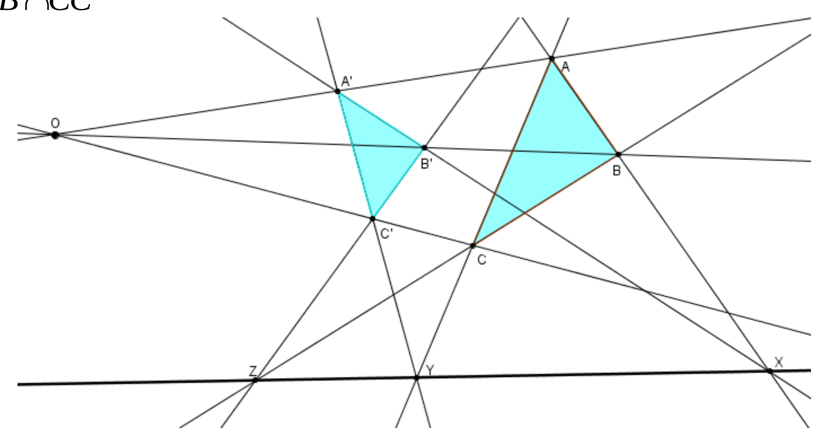
5.5.2 Teorema. Teorema de Hessenberg.

En un plano proyectivo, si se cumple el postulado de Pappus también se cumple el postulado de Desargues.

"Pappusian planes are Desarguesian" (G. Hessenberg, Mathematische Annalen, 61 (1905) pp.161-172)

Demostración.

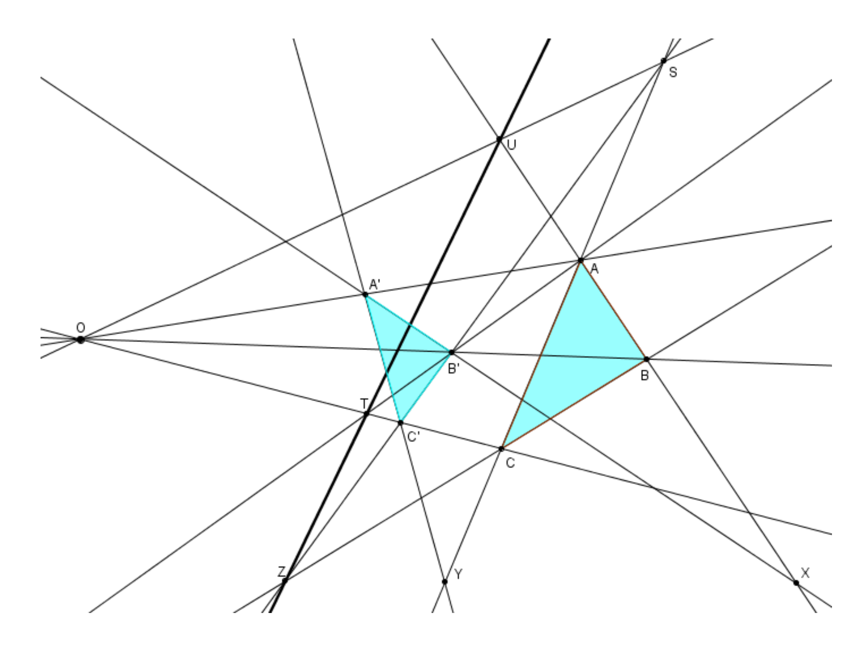
Sean dos triángulos ABC y A'B'C' cuyos vértices están en perspectiva por un punto O: $O = AA' \cap BB' \cap CC'$



Queremos ver que los puntos $X = AB \cap A'B'$, $Y = AC \cap A'C'$ y $Z = BC \cap B'C'$ están alineados.

Primer Paso:

Sean $S = B'C' \cap AC$, $T = B'A \cap CC'$ y $U = BA \cap OS$:

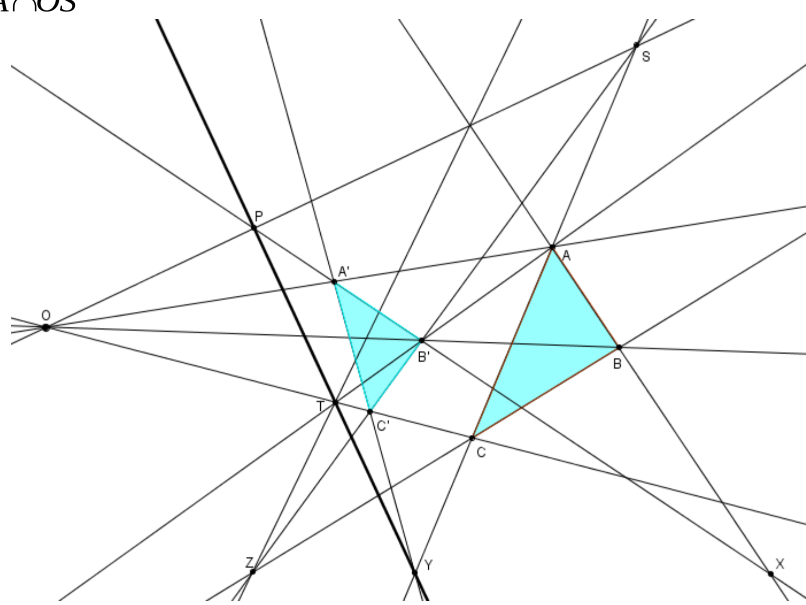


Los puntos O, B y B’ están alineados. Los puntos A, S y C también están alineados, y todos son diferentes de la intersección de sus respectivas rectas, luego, aplicando el Postulado de Pappus, los puntos

$$\begin{matrix} O & B & B' \\ A & S & C \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} BC \cap B'S = Z \\ OS \cap AB = U \\ OC \cap AB' = T \end{cases} \text{ están alineados.}$$

donde utilizamos que B’S=B’C’ y OC=CC’.

Segundo paso:
Sea $P = B'A' \cap OS$

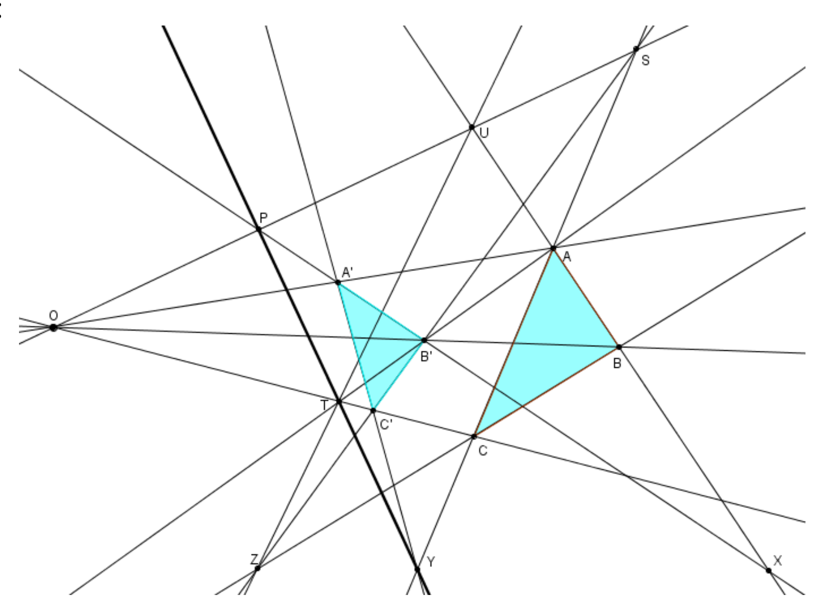


Los puntos O, A y A’ están alineados. Los puntos B’, C’ y S también están alineados, y todos son diferentes de la intersección de sus respectivas rectas, luego aplicando el Postulado de Pappus, los puntos

$$\begin{matrix} O & A & A' \\ B' & C' & S \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} AS \cap A'C' = Y \\ OC' \cap AB' = T \\ OS \cap A'B' = P \end{cases} \text{ están alineados.}$$

donde utilizamos que AS=AC y OC'=CC'.

Tercer paso:



Hemos definido $U = BA \cap OS$ y $P = B'A' \cap OS$, luego ambos puntos pertenecen a OS, y por tanto los puntos U, S y P están alineados.
Por otro lado $T = B'A \cap CC'$ pertenece a la recta B'A, luego los puntos B', T y A están alineados.
Además, todos son diferentes de la intersección de sus respectivas rectas, luego aplicando el Postulado de Pappus, los puntos

$$\begin{matrix} U & S & P \\ B' & T & A \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} AS \cap PT = Y \\ UT \cap B'S = Z \\ UA \cap PB' = X \end{cases} \text{ están alineados}$$

es decir, se cumple el Postulado de Desargues.
Aquí hemos utilizado los siguientes hechos:
$Y = AC \cap A'C' = AS \cap A'C' = AS \cap PT$ (segundo paso)
$Z = BC \cap B'C' = BS \cap B'C' = AS \cap UT$ (primer paso)
$X = AB \cap A'B' = UA \cap A'B' = UA \cap PB'$

(Fuente de la demostración: Timothy Vis "The Theorem of Desargues")

5.5.3 Teorema.
En un plano proyectivo analítico $P_2(K)$ sobre un anillo de división K (es decir, un cuerpo no necesariamente conmutativo) se cumple el Postulado de Desargues.

Demostración.
Siempre podemos realizar una inmersión trivial

$$P_2(K) \to P_3(K)$$
$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z, 0)$$

y en todo espacio proyectivo tridimensional se cumple el Postulado de Desargues (ver 7.6.3).

5.6 Colineaciones.

5.6.1 Definición. Colineación.
Una colineación es una aplicación biyectiva $f : IP_2 \to IP_2$ que pasa puntos alineados a puntos alineados.

5.6.2 Proposición.
Toda colineación $f : IP_2 \to IP_2$, restringida a cualquier recta r, determina una biyección entre la recta r y su recta imagen $f(r)$.

Demostración.
Sea r una recta cualquiera de IP_2. Sean $A, B \in r$ distintos. Por ser f biyectiva, $f(A)$ y $f(B)$ serán distintos y por tanto determinarán una recta r'. Veamos que la función f, restringida a r, es una biyección $f\big|_r : r \to r'$
Si $C \in r$, entonces $f(C)$ está alineado con $f(A)$ y $f(B)$, luego $f(C) \in r'$, es decir, $f(r) \subset r'$.
Supongamos ahora que $C' \in r'$ tal que $C' = f(C)$ con $C \notin r$.
Para cualquier $D \in P_2(IR)$, sea $E = CD \cap r$. $D \in CD \Rightarrow f(D) \in f(CD) = r'$, luego tendríamos $f(IP_2) \subset r'$, contradiciendo la hipótesis de que f es una biyección. Luego $f(r) = r'$.

5.6.3 Corolario.
La inversa de toda colineación es una colineación.

Demostración.
Basta aplicar la proposición anterior.

5.6.4 Corolario.
Si tres puntos de $P_2(IR)$ no están alineados, sus imágenes por una colineación tampoco estarán alineados.

5.7 Proyectividades entre rectas.

5.7.1 Definición. Perspectividad.

Dadas dos rectas r y s, y un punto P fuera de ambas, definimos la perspectividad de centro P como la biyección

$$f : r \to s$$
$$X \mapsto XP \cap s$$

Y la denotaremos por $r \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} s$, o simplemente $r \overset{=}{\wedge} s$.

La función inversa de una perspectividad es también una perspectividad con su mismo centro y la función identidad es una perspectividad, pero en general la composición de perspectividades no es una perspectividad.

5.7.2 Definición. Proyectividad entre rectas.

Diremos que una función $f : r \to s$ es una proyectividad cuando sea una composición finita de perspectividades, y se denotará por $r \overline{\wedge} s$.

Se comprueba fácilmente que toda proyectividad, por ser una composición de biyecciones, será siempre biyectiva.

La composición de proyectividades es siempre una proyectividad, la función inversa de una proyectividad es otra proyectividad (basta con tomar al revés la cadena de perspectividades) y la función identidad es una proyectividad.

5.7.3 Proposición.

Dadas dos rectas r y s, tres puntos distintos A, B y C en r y tres puntos distintos A’, B’ y C’ en s, existe una proyectividad $f : r \to s$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ y $f(C) = C'$.

Demostración.

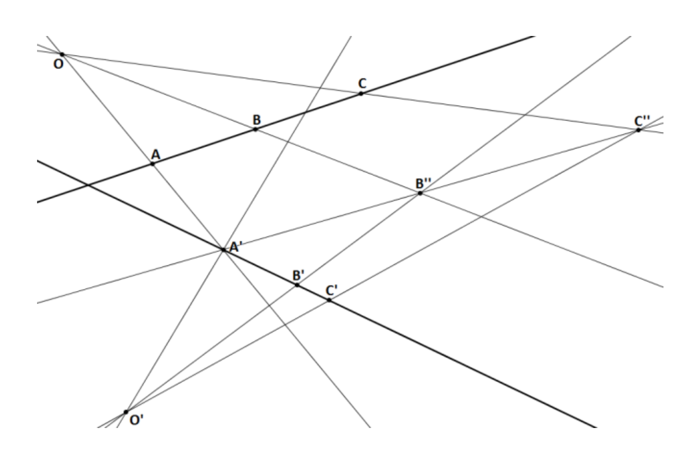
Supongamos que $r \neq s$. Tomamos un punto $O \in AA'$, $O \neq A, A'$ (Axioma PP4).

Tomamos una recta t, $A' \in t$, $t \neq s$ (5.1.8)

Sean $B'' = OB \cap t$ y $C'' = OC \cap t$.

Sea $O' = B''B \cap C''C$.

La composición de las dos perspectivas $r \underset{=}{\overset{O}{\wedge}} t \underset{=}{\overset{O'}{\wedge}} s$ cumple las condiciones deseadas.



Supongamos ahora que $r = s$. Tomamos cualquier recta t diferente de r y s y cualquier perspectiva de r en t. Sean A’’, B’’ y C’’ sus puntos imagen en t. Tomamos también la

proyectividad de t en r que envía A’’ a A’, B’’ a B’ y C’’ a C’ (su existencia ha quedado demostrada en la primera parte de este teorema). Su composición será la proyectividad deseada.

5.7.4 Postulado. Plano proyectivo fundamental (PPF).
Dadas dos rectas r y s, tres puntos distintos A, B y C en r y tres puntos distintos A’, B’ y C’ en s, existe una única proyectividad $f : r \to s$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ y $f(C) = C'$.
Un **plano proyectivo fundamental** (PPF) es un plano proyectivo incidental, es decir, que cumpla los axiomas PP1-PP5, y además el Teorema Fundamental (TF).

Veremos que en un plano proyectivo incidental (es decir, que cumpla los axiomas PP1-PP5) el Teorema fundamental (TF) es equivalente al Postulado de Pappus (PP6):

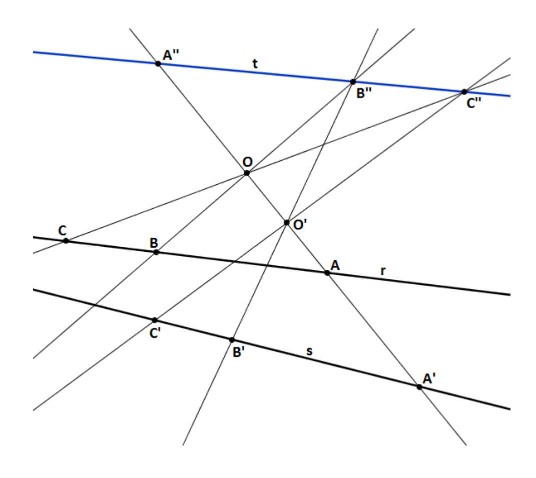
Teorema fundamental (TF) $\Leftrightarrow$ Postulado de Pappus (PP6).

5.7.5 Proposición. Caracterización de las perspectividades.
En un plano fundamental, sean r y s dos rectas diferentes, sea $O = r \cap s$ y $f : r \to s$ una proyectividad.
Entonces f es una perspectividad $\Leftrightarrow$ $f(O) = O$.

Demostración.
$\Rightarrow$ Si f es una perspectividad de centro P, entonces $f(O) = (P \vee O) \cap s = O$ puesto que $O \in s$ y $O \in P \vee O$ y son dos rectas diferentes, pues $P \notin s$.
$\Leftarrow$ Tomamos otros dos puntos diferentes A y B de la recta r. Sean $A' = f(A) \in s$ y $B' = f(B) \in s$. Sea $P = AA' \cap BB'$ y sea g la perspectividad de centro P. Entonces $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ y $g(O) = O$. Luego ambas proyectividades coinciden en tres puntos diferentes y por tanto, por el TF, $f = g$.

5.7.6 Teorema.
Toda proyectividad entre dos rectas del plano proyectivo se puede descomponer en la composición de dos perspectividades, si las rectas son diferentes, o en la composición de tres perspectividades, si se trata de la misma recta.

Sea una proyectividad $\sigma : r \to s$. En primer lugar vamos a suponer que $r \neq s$.
Escogemos en la recta r tres puntos A, B, C diferentes dos a dos.
Sean $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ y $C' = \sigma(C)$ sus respectivas imágenes en s.
Sobre la recta AA’ fijamos un punto $O \notin r$ y un punto $O' \notin s$.
Determinamos los puntos $B'' = OB \cap O'B'$ y $C'' = OC \cap O'C'$.
Sea t la recta que pasa por B’’ y C’’.
Sea $A'' = t \cap AA'$.



Sea $\sigma_1 : r \to t$ la perspectividad de centro O.
Sea $\sigma_2 : t \to s$ la perspectividad de centro O'.

Veamos que entonces se cumple $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$.
Se cumple efectivamente sobre los tres puntos del símplex $\{A, B, C\}$:
$\sigma_2 \circ \sigma_1(A) = \sigma_2(A'') = A'$, $\sigma_2 \circ \sigma_1(B) = \sigma_2(B'') = B'$, $\sigma_2 \circ \sigma_1(C) = \sigma_2(C'') = C'$

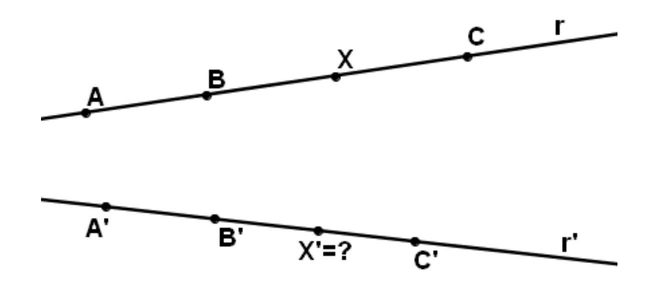
Por otro lado sabemos que toda perspectividad es una proyectividad, y que la composición de homografías es una proyectividad, luego $\sigma_2 \circ \sigma_1$ es una proyectividad.
Ahora bien, sabemos también que dos homografías serán idénticas si coinciden sobre un símplex, como es este caso, luego $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$.
En efecto, sabemos que una proyectividad quedará unívocamente determinada por su imagen sobre un símplex, en este caso sobre, y efectivamente $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ y es la composición de dos perspectividades.

Nos falta comprobar el caso $r = s$.
Sea $\sigma : r \to r$ una proyectividad. Tomamos como antes tres puntos A, B y C de r diferentes entre sí. Tomamos una recta s diferente de r y un punto O fuera de r y de s.
La perspectividad $\tau : r \to s$ con centro O envía A, B y C a tres puntos A'', B'', C''.
Luego su función inversa $\tau^{-1} : s \to r$ será también una perspectividad, y por tanto una proyectividad.
Consideremos ahora la proyectividad $\rho = \sigma \circ \tau^{-1} : s \to r$.
Como opera sobre dos rectas diferentes, podemos aplicar la primera parte de esta demostración para descomponerla en dos perspectividades: $\rho = \rho_2 \circ \rho_1 : s \to r$
Y por lo tanto $\sigma = \rho \circ \tau = \rho \circ \rho_2 \circ \rho_1$ es una composición de tres perspectividades.
Esto último se deduce fácilmente comprobando que ambas funciones son idénticas sobre el símplex $\{A, B, C\}$.

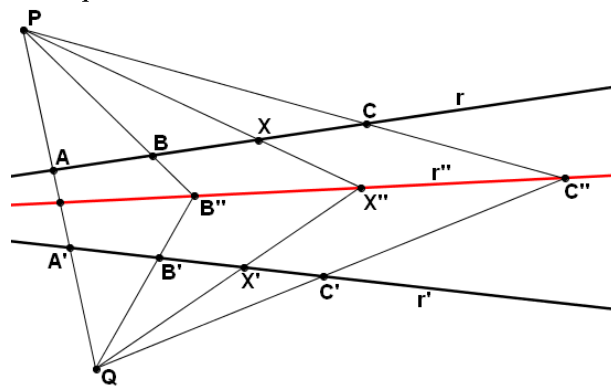
5.7.7 Corolario. Construcción gráfica de una proyectividad entre dos rectas conocidos tres puntos y sus imágenes.

El teorema anterior nos muestra el método para construir gráficamente una proyectividad entre dos rectas conocidos tres puntos y sus imágenes.

Si se trata de dos rectas diferentes:



Sean P y Q dos puntos de AA’. Trazamos la recta PB y QB’ y marcamos su punto de intersección $B''= PB \cap QB'$. De la misma forma trazamos las rectas PC y QC’ y su punto de intersección $C''= PC \cap QC'$. Trazamos ahora la recta $r''= B''C''$.
Tenemos dos proyecciones, una de r en r’’ con centro P y otra de r’’ en r’ con centro Q, la composición de estas dos proyecciones envía la terna {A, B, C} en {A’, B’, C’}, luego es la proyectividad que buscamos.

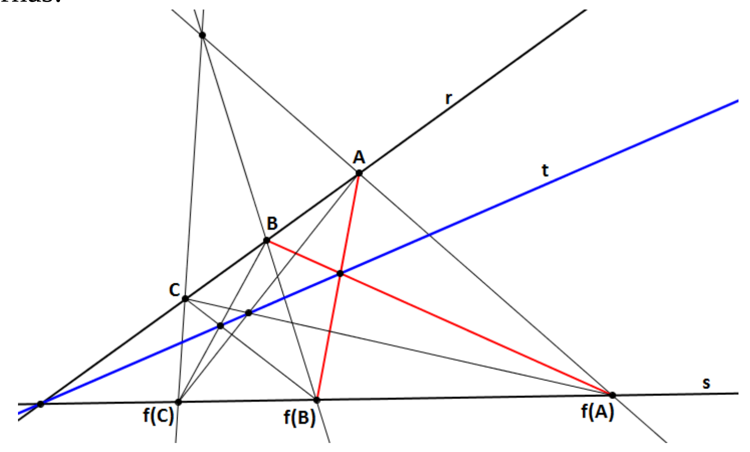


Por lo tanto, para cualquier punto X de r, encontramos su imagen mediante la composición de las dos proyecciones: proyectamos X en r’’ con centro P obteniendo el punto X’’, y proyectamos el punto X’’ en r’ con el centro Q.

Si se trata de una proyectividad en una misma recta r:
Basta con trazar una recta $r' \neq r$ y un punto O no perteneciente a ninguna de las dos rectas.
Sea la proyección desde O de la recta r sobre la recta r’, con la que tenemos los puntos $A \mapsto A''$, $B \mapsto B''$ y $C \mapsto C''$.
Sea la proyectividad de r’ sobre r definida por $A'' \mapsto A'$, $B'' \mapsto B'$ y $C'' \mapsto C'$ (y acabamos de mostrar cómo construir una proyectividad entre dos rectas diferentes).
Claramente la proyectividad deseada será la composición de ambas.

5.7.8 Proposición. Eje de una proyectividad entre rectas.
Sean r y s dos rectas diferentes de $P_2(IR)$, sea $O = r \cap s$ y $f : r \to s$ una proyectividad. Entonces los puntos de la forma $Af(B) \cap Bf(A)$ determinan una recta al variar A y B sobre r. Esta recta se denomina eje de la proyectividad.
Esta recta nos permite un método gráfico de construcción de la imagen $f(X)$ de un punto $X \in r$, conocidos el eje de la proyectividad y la imagen de un punto fijo $P \in r, P \neq O$.

Demostración. Añadimos un tercer punto C de la recta r, y consideramos el par de ternas $\{A,B,C\}$ de r y $\{f(A), f(B), f(C)\}$ de s. Sea t la recta de Pappus asociada a dicho par de ternas:



Consideramos la siguiente composición de proyectividades:

$$g : r \to f(C)^* \to t \to C^* \to s$$
$$X \mapsto X \vee f(C) \mapsto (X \vee f(C)) \cap t \mapsto ((X \vee f(C)) \cap t) \vee C \mapsto (((X \vee f(C)) \cap t) \vee C) \cap s$$

Calculamos las imágenes de A, B y C por g:

$$C \mapsto C \vee f(C) \mapsto (C \vee f(C)) \cap t \mapsto ((C \vee f(C)) \cap t) \vee C = C \vee f(C) \mapsto (C \vee f(C)) \cap s = f(C)$$
$$A \mapsto A \vee f(C) \mapsto (A \vee f(C)) \cap t \mapsto ((A \vee f(C)) \cap t) \vee C \mapsto (((A \vee f(C)) \cap t) \vee C) \cap s = f(A)$$
$$B \mapsto B \vee f(C) \mapsto (B \vee f(C)) \cap t \mapsto ((B \vee f(C)) \cap t) \vee C \mapsto (((B \vee f(C)) \cap t) \vee C) \cap s = f(B)$$

Luego $f = g$, y por tanto
$f(X) = (((X \vee f(C)) \cap t) \vee C) \cap s \Rightarrow f(X) \in ((X \vee f(C)) \cap t) \vee C$
Y por tanto $f(X), C, (X \vee f(C)) \cap t$ están alineados.
Luego $Af(B) \cap Bf(A) \in t$
(???? Acabar)

5.7.9 Proposición.
El conjunto de proyectividades $f : r \to r$ de una recta en sí misma forma un grupo con la composición, al que denotaremos por $PJ(r)$.

Demostración.

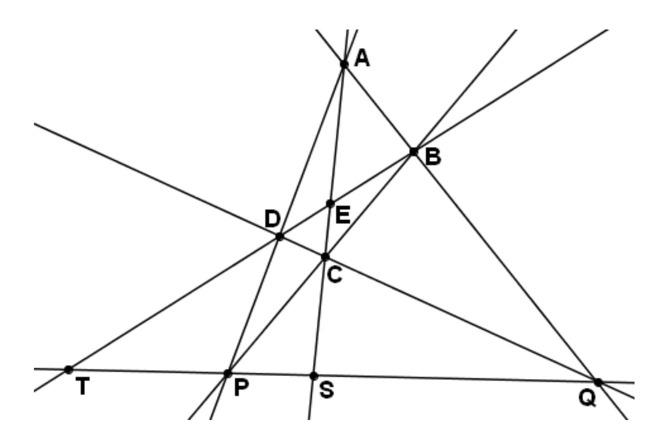
5.7.10 Proposición.
Toda proyectividad $f \in PJ(r)$ con tres puntos fijos es la identidad.

Demostración.
Basta aplicar el TF.

5.7.11 Definición. Punto fijo.
Dada una proyectividad $f \in PJ(r)$, diremos que $P \in r$ es un punto fijo o doble si $f(P) = P$.

5.7.12 Proposición.

Si $H(P,Q;S,T)$, entonces $(P,Q,S,T)\overset{A}{\barwedge}(D,B,E,T)\overset{C}{\barwedge}(Q,P,S,T)$, y por tanto $(P,Q,S,T)\barwedge(Q,P,S,T)$



Demostración.
Basta observar la figura.

5.7.13 Corolario.
Las perspectividades conservan los conjuntos armónicos.

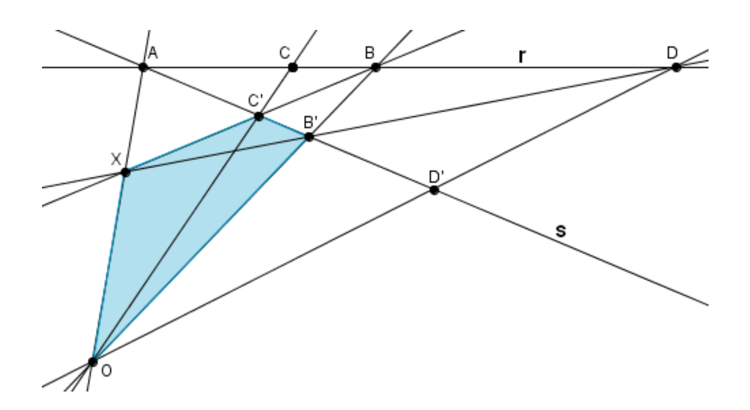
Demostración.
Toda perspectividad es una composición de una sección y una proyección.

5.7.14 Corolario.
Si $(A,B,C,D)\barwedge(A',B',C',D')$ entonces $H(A,B;C,D)\Rightarrow H(A',B';C',D')$

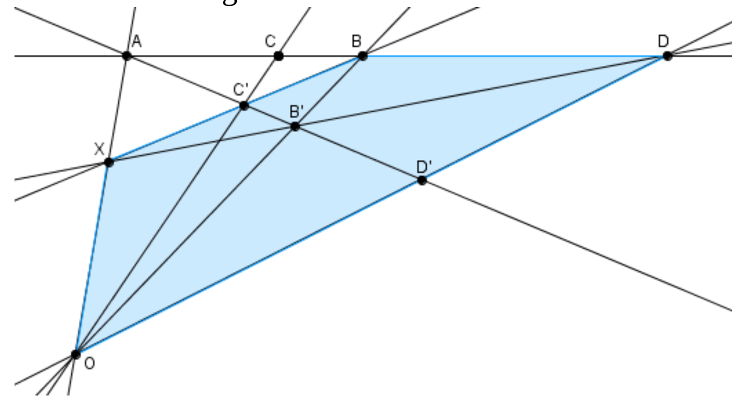
Demostración.
Toda proyectividad es una sucesión de perspectividades, y las perspectividades conservan los conjuntos armónicos.

5.7.15 Teorema.
Una proyectividad pasa conjuntos armónicos en conjuntos armónicos.

Demostración.
Primera parte.
Sean A, B, C y D cuatro puntos de una recta r tales que $H(A,B;C,D)$.
Sea s una segunda recta tal que $A=r\cap s$. Consideramos la perspectiva $r\underset{\wedge}{\overset{O}{=}}s$ que envía B, C y D a B', C' y D' respectivamente.
Veamos que entonces $H(A,B';C',D')$.
Trazamos la recta C'B y sea X su punto de intersección con OA.
Consideramos el cuadriángulo completo OXB'C'. Una de sus diagonales es B y la otra es A, y el punto C está en la recta OC', luego D es el cuarto armónico respecto de ACB, y por tanto $XB'\cap r=D$.



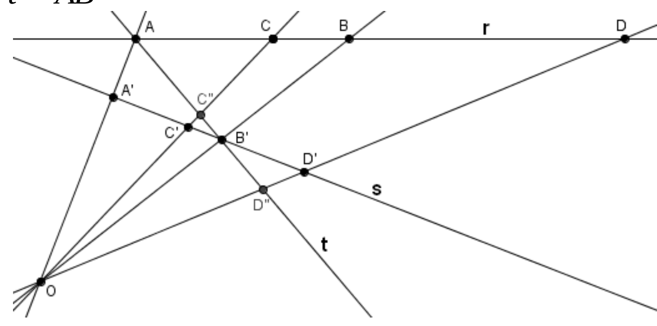
Ahora consideramos el cuadriángulo OXBD.



Dos de sus diagonales son A y B', y los otros lados cortan a s en C' y D', luego $H(A,B';C',D')$.

Segunda parte:
Sea r una recta y A, B, C, D cuatro puntos en r tales que $H(A,B;C,D)$. Trazamos una perspectiva de centro O sobre cualquier recta s. Sean A', B', C', D' sus imágenes en s. Entonces $H(A,B;C,D) \Rightarrow H(A',B';C',D')$

Trazamos la recta $t = AB'$



Entonces podemos descomponer la perspectiva anterior en dos:

$$(A,B,C,D)\underset{\wedge}{\overset{O}{=}}(A,B',C'',D'')\underset{\wedge}{\overset{O}{=}}(A',B',C',D')$$

con la peculiaridad de que en cada una de las dos perspectividades anteriores uno de los puntos es fijo.
Luego podemos aplicar el lema anterior para demostrar que
$H(A,B;C,D) \Rightarrow H(A',B';C',D')$.

Tercera parte:
Sea r una recta y A, B, C, D cuatro puntos en r tales que $H(A,B;C,D)$.
Si $(A,B,C,D)\overline{\wedge}(A',B',C',D')$, entonces $H(A,B;C,D) \Rightarrow H(A',B';C',D')$

Basta tener en cuenta que toda proyectividad es una composición de perspectividades y aplicar el lema anterior.

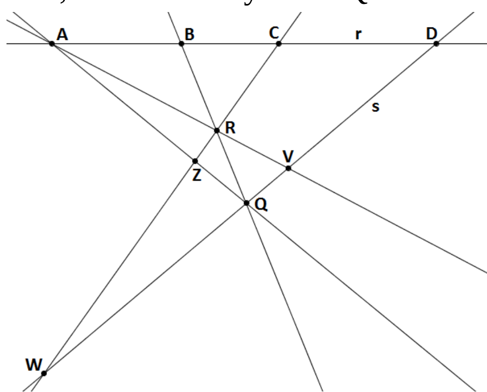
5.8 Involuciones.

5.8.1 Definición. Involución.
Una involución es una proyectividad $f \in PJ(r)$ tal que $f^2 = f \circ f = Id$.

5.8.2 Definición. Par conjugado.
Dada una proyectividad $f \in PJ(r)$, diremos que dos puntos A y B son un **par conjugado** cuando $f(A) = B$, y $f(B) = A$ (en cuyo caso se cumple $f^2(A) = A$).
Notación: Por el TF, toda involución $ABC \overline{\wedge} BAD$ quedará determinada por dos pares conjugados, con lo que la podemos denotar por $(AB)(CD)$.

5.8.3 Proposición.
Si una proyectividad $f \in PJ(r)$ tiene un par conjugado, entonces es una involución.

Demostración.
Sea $f \in PJ(r)$ tal que $f(A) = B$ y $f(B) = A$. Sea $C \in r$ cualquier otro punto de la recta y $D = f(C)$. Queremos ver que $D = C$.
Sea s una recta que pasa por D, $s \neq r$. Sea $R \notin r$.
Sea $V = AR \cap s$, $Q = BR \cap s$, $W = CR \cap s$ y $Z = AQ \cap CR$.



Entonces $ABCD \overset{Q}{\doteq} ZRCW \overset{A}{\doteq} QVDW \overset{R}{\doteq} BADC$, es decir $ABCD \overline{\wedge} BADC$.
Esta proyectividad envía A a B, B a A, C a D y D a C, luego por el TF debe ser f, y por tanto $f(D) = C$.

5.8.4 Proposición.
Si una involución tiene un punto fijo, entonces tiene otro punto fijo distinto. Por lo tanto, una involución podrá ser elíptica o hiperbólica, nunca parabólica.

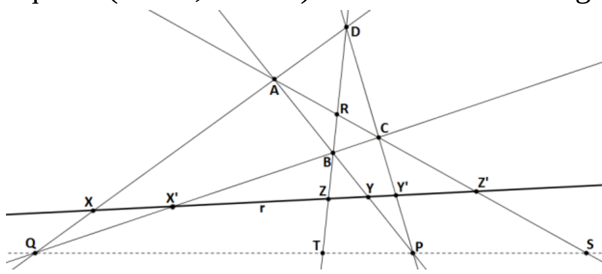
Demostración.

5.8.5 Teorema.
Sean X, Y, Z y X', Y', Z' dos ternas de puntos distintos dos a dos (los de cada terna) en una recta r. Supongamos además que $Z \neq Z'$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:
a) $\Omega(XYZ, X'Y'Z')$.
b) Existe una (única) homografía $f : r \to r$ tal que $f(X) = Y'$, $f(Y) = X'$, $f(Z) = Z$ y $f(Z') = Z'$.

c) Existe una (única) involución I en r a la cual (X,X’), (Y,Y’) y (Z,Z’) son pares conjugados (entendiendo que son puntos fijos si las dos componentes coinciden).

Demostración.

$a) \Rightarrow b)$ Supongamos que $\Omega(X\,Y\,Z, X'Y'Z')$. Consideremos el siguiente esquema:



$$(X,Y,Z,Z')\overset{A}{\underset{=}{\wedge}}(D,B,Z,R)\overset{C}{\underset{=}{\wedge}}(Y',X',Z,Z')$$

(Acabar).

6 El espacio proyectivo real.

6.1 Construcción.

6.1.1 Definición. El espacio proyectivo real.

Definimos el espacio proyectivo real $P_3(IR)$ de la forma acostumbrada: Como el conjunto $IR^4 - \{(0,0,0,0)\}$ bajo la siguiente relación de equivalencia:

$$(a,b,c,d) \cong (e,f,g,h) \Leftrightarrow \exists \lambda \in IR - \{0\} \mid (a,b,c,d) = \lambda(e,f,g,h)$$

$$P_3(IR) = \frac{IR^4 - \{(0,0,0,0)\}}{IR - \{0\}}$$

Es decir, los elementos de $P_3(IR)$ serán los subespacios vectoriales de dimensión 1 de IR^4.

7 Espacios proyectivos axiomáticos.

7.1 Planos y espacios incidentales.

7.1.1 Definición. Plano incidental.

Un plano incidental es aquel en el que se cumplen los siguientes axiomas:

H1.1 Para todo par de puntos A y B, existe una recta que contiene A y B.

H1.2 Para todo par de puntos diferentes A y B existe no más de una recta que contiene A y B.

H1.3a Existen al menos dos puntos en cada recta.

H1.3b Existe al menos tres puntos que no están en una misma recta.

7.1.2 Definición. Espacio incidental.

Un espacio incidental es aquel en el que además de los axiomas anteriores, se cumplen los siguientes:

H1.4 Si A, B y C son tres puntos que no pasan por la misma recta, existe un plano que contiene los tres puntos.

H1.4a Todo plano contiene al menos un punto.

H1.5 Si A, B y C son tres puntos que no pasan por una misma recta, existe no más de un plano que los contiene.

H1.6 Si dos puntos diferentes A y B de una recta están en un plano, todos los puntos de la recta están en el plano. En este caso diremos que la recta está contenida en el plano.

H1.7 Si dos planos tienen un punto en común, entonces tienen al menos otro punto más en común.

H1.8 Existen al menos cuatro puntos que no están contenidos en un mismo plano.

7.1.3 Definiciones. Paralelismo entre rectas, entre planos y entre recta y plano.
Diremos que dos rectas son paralelas cuando no tengan ningún punto en común y pertenezcan a un mismo plano.
Diremos que dos planos son paralelos cuando no tengan ningún punto en común.
Diremos que un plano y una recta son paralelos cuando no tengan ningún punto en común.

7.1.4 Proposición. Teorema #1 de Hilbert.
a) Dos rectas diferentes tienen uno o ningún punto en común.
b) Dos planos diferentes o no tienen ningún punto en común, o tienen una recta en común y ningún punto más.
c) Un plano y una recta que no pertenezca al plano tienen uno o ningún punto en común.

Demostración.

a) Sean r y s dos rectas diferentes. Supongamos que tienen dos puntos en común P y Q. Entonces por H1.2 ambas rectas tienen que ser la misma, contradiciendo la hipótesis.

b) Sean α y β dos planos diferentes. Si no tienen ningún punto en común, ya hemos acabado. Supongamos que tienen un punto en común P. Entonces por H1.7 tendrán además un segundo punto en común Q. Luego por el axioma H1.6 todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ pertenecerán a α y a β, es decir, estarán en su intersección. Supongamos que un punto que no pertenece a $\overleftrightarrow{PQ}$ está también en la intersección. Por H1.5 sólo puede existir un plano que los contenga, luego $\alpha = \beta$, contradiciendo la hipótesis.

c) Supongamos que la recta r y el plano α tienen dos puntos en común. Entonces por el axioma H1.6 toda la recta estará contenida en el plano, contradiciendo la hipótesis.

7.1.5 Proposición. (Proposición #2 de Hilbert).
a) Dada una recta y un punto fuera de ella, existe un único plano conteniendo la recta y el punto.
b) Dadas dos rectas diferentes y con puntos en común, existe un único plano conteniendo a ambas.

Demostración.
a) Sea r una recta y $P \notin r$. Por el axioma H1.3a existirán dos puntos $A, B \in r$. Claramente A, B y P no son colineales, luego por H1.4 existirá un plano α que los contenga. Puesto que contiene A y B, contendrá toda la recta r. Dicho plano es único por H1.5.
b) Sean r y s dos rectas diferentes y con puntos en común. Luego tendrán un único punto P en común por la proposición ????.
Luego podemos encontrar al menos otro punto $A \neq P$ en la recta r por H1.3a. De la misma forma podemos encontrar al menos otro punto $B \neq P$ en la recta s.
Los tres puntos A, B y P son diferentes, pues si $A = B$ entonces $r = s$ llegando a contradicción.
Por lo tanto por H1.4 existirá un plano α que contiene a los tres puntos A, B y P. Luego contendrá toda la recta r y toda la recta s por H1.6. El plano será único por H1.5.

7.1.6 Proposición.
En todo plano existirán al menos tres puntos no alineados. Así pues, todo plano se podrá siempre definir por tres puntos no alineados contenidos en él.

Demostración.
Sea un plano α. Por el axioma H1.4a existirá un punto $P \in \alpha$.
Por el axioma H1.8 existirán cuatro puntos A, B, C y D que no pertenecen a un mismo plano, luego al menos tres de ellos junto con P no pertenecerán a un mismo plano.

Efectivamente, supongamos por el contrario que P, A, B y C pertenecen a un plano δ, y los puntos P, A, B y D pertenecen a un plano γ diferente. Entonces por la proposición

???? los dos planos se cortarán en una recta, es decir, P, A ,B ,C y D pertenecerán a una misma recta, lo cual es absurdo.

(???? MEJORAR)

Renombrando los puntos si hace falta, podemos suponer que P no pertenece al plano determinado por A, B y C.

Consideremos el plano α determinado por P, A y B. El punto P está en $\alpha \cap \pi$, por lo tanto la intersección $\alpha \cap \pi$ será una recta contiendo P. Por el axioma H1.3a existirá un segundo punto Q en esta recta.

De la misma manera podemos considerar el plano β determinado por los puntos P, A y C, El punto P está en $\beta \cap \pi$, luego la intersección $\beta \cap \pi$ será una recta conteniendo P, y por el axiomna H1.3a existirá un segundo punto R en esta recta.

Los planos α y β son diferentes, puesto que si fueran el mismo plano B pertenecería al plano determinado por P, A y B,

Los tres puntos P, Q y R son diferentes, no están alineados y pertenecen a π, por lo que determinarán el plano π.

7.1.11 Definición. Modelo "hand shake".

Un modelo "hand shake" es un plano incidental en el cual todas las rectas tienen exactamente dos puntos.

7.1.12 Definición. "Straight fan".

Un "straight fan" es un plano incidental en el cual todos los puntos excepto uno pertenecen a una misma recta.

7.2 Planos y espacios incidentales de Hilbert.

7.2.1 Postulado. Postulado de paralelismo de Hilbert en el plano. Plano de Hilbert.
En un plano incidental, dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existirá como mucho una recta que pase por A y sea paralela a r.
Un plano incidental de Hilbert es un plano incidental en el que se cumple el postulado de paralelismo de Hilbert en el plano.

7.2.2 Postulado. Postulado de paralelismo de Hilbert en el espacio.
En un espacio incidental, dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existirá como mucho una recta en el plano determinado por r y P que pase por A y sea paralela a r.
Un espacio incidental de Hilbert es un espacio incidental en el que se cumple el postulado de paralelismo de Hilbert en el espacio.

7.2.3 Proposición. Lema de Proclus.
En un plano de Hilbert, dadas dos rectas paralelas:
a) Si una tercera recta corta la primera también cortará la segunda.
b) Si una tercera recta es paralela a la primera también será paralela a la segunda.

Demostración.
a) Sean dos rectas paralelas r y s, y una tercera recta t que corta a r en el punto P. Por el axioma de Hilbert de paralelismo, existirá como mucho una recta paralela a s por P, pero la recta r es paralela a s por P por construcción, y la recta t pasa por P, luego no puede ser paralela a s.
b) Sean dos rectas paralelas r y s, y una tercera recta t paralela a r. Supongamos que t no es paralela a s, entonces podemos aplicar el apartado a) de esta misma proposición para deducir que t ha de cortar también a r, contradiciendo la hipótesis.

7.2.4 Proposición.
En un plano incidental en el que se cumple el lema de Proclus (7.2.7) es un plano de Hilbert.

Demostración.
Sea una recta r y un punto P fuera de ella. Supongamos que las rectas s y t pasan por P y ambas son paralelas a r. Las rectas t y r son paralelas y la recta s corta a t, luego por el lema de Proclus (a), la recta s también deberá cortar r, contradiciendo la hipótesis de que eran paralelas.

7.2.5 Proposición.
En un plano de Hilbert la relación de “ser iguales o paralelas” entre rectas es una relación de equivalencia.

Demostración.
a) Propiedad reflexiva: $r = r$ es un axioma lógico.
b) Propiedad simétrica: $l = m \Rightarrow m = l$ y $l // m \Rightarrow m // l$.
c) Propiedad transitiva: $r // s \wedge s // t \Rightarrow r // t$ es el Lema de Proclus (b).
Para demostrar que $r // s \wedge s = t \Rightarrow r // t$ basta con substituir.

7.2.6 Corolario.

En un plano incidental, las siguientes condiciones son equivalentes:
a) Se cumple el postulado de paralelismo de Hilbert.
b) Dadas dos rectas paralelas, si una tercera recta corta la primera también cortará la segunda.
c) Dadas dos rectas paralelas, si una tercera recta es paralela a la primera también será paralela a la segunda.
d) La relación de “ser iguales o paralelas” define una relación de equivalencia entre rectas.

7.2.7 Proposición.
En un espacio incidental de Hilbert el lema de Proclus se cumplirá en cualquiera de sus planos.

Demostración.

7.2.8 Proposición.
En un espacio incidental de Hilbert, dadas dos rectas paralelas y un plano que corta la primera, se dará uno de los tres casos siguientes:
a) Las dos rectas están contenidas en el plano.
b) La primera recta está contenida en el plano y la segunda es paralela al plano.
c) Las dos rectas cortan el plano en dos únicos puntos diferentes.

Demostración.
Sea un plano α y dos rectas paralelas r y s. Por definición de rectas paralelas, existirá un plano β conteniendo r y s. Sea P un punto de corte entre α y r.
Si $\alpha = \beta$ entonces estamos en el caso a).
Si por el contrario $\alpha \neq \beta$, estos planos se cortan en P, luego por el teorema #1 de Hilbert, se cortarán exactamente en una recta t.
Si las rectas t y r tienen algún punto de corte más tendremos que $t = r$, y la recta s será paralela al plano α. En efecto, supongamos que la recta s corta el plano α en Q. Entonces $Q \in \alpha \cap s \wedge s \subset \beta \Rightarrow Q \in \alpha \cap \beta \Rightarrow Q \in t = r \Rightarrow Q \in r \cap s$ contradiciendo la hipótesis del paralelismo entre r y s.
Si por el contrario $t \neq r$, dentro del plano β tenemos que la recta t corta a r, y r es paralela a s, luego la recta t también cortará a s por Proclus (????), y nos encontraremos con el caso c).

7.2.9 Proposición.
En un espacio incidental de Hilbert:
a) Dadas dos rectas paralelas, si una de ellas corta un plano <u>en un único punto</u>, la otra también.
b) Dados dos planos paralelos, si una recta que corta el primero pero sin estar totalmente contenida en él también cortará el segundo.
c) Dados dos planos paralelos, si un tercer plano corta el primero también cortará el segundo.

Demostración.
a) Aplicando la proposición anterior, sólo se puede dar el caso c).
b) Sean dos planos $\alpha // \beta$, una recta r y $P = \alpha \cap r$. Sea Q un punto de β (axioma H1.4a). Si $Q \in r$ ya hemos acabado. En caso contrario, sea γ el plano que contiene la

recta r y el punto Q (Proposición #2 de Hilbert). El punto P pertenece a los planos α y γ, luego ambos planos se cortarán en una recta s (Teorema #1 de Hilbert b)
De la misma forma, el punto Q pertenece a los planos β y γ, luego ambos planos se cortarán en una recta t.
Las rectas s y t son paralelas pues ambas están contenidas en un mismo plano γ y no tienen ningún punto en común, pues pertenecen a planos paralelos. La recta r está también contenida en γ, y corta a s en P. Luego aplicando Proclus, r deberá también cortar a t, en un punto que forzosamente estará en β, tal y como queríamos ver.
c) Sean dos planos $\alpha // \beta$, y supongamos que un tercer plano γ corta al primero. Entonces lo cortará en toda una recta r por el Teorema #1 de Hilbert (b).
Sea P un punto de r. (axioma H1.3a).
Sea s una segunda recta contenida en γ y pasando por P (????). La recta s no puede estar contenida en α porque de lo contrario $r = s$.
Aplicamos el apartado b) de esta misma proposición para demostrar que la recta s cortará al plano β, y dicho punto estará en la intersección de los planos γ y β.

7.2.10 Transitividad del paralelismo.
En un espacio incidental de Hilbert, se cumple la transitividad del paralelismo:

$$r // s \wedge s // t \Rightarrow r // t$$

Demostración. Podemos suponer que las tres rectas son diferentes. En caso contrario la demostración es trivial.

Puesto que $r // s$ existirá un plano π_1 conteniendo r y s, y se cumplirá $r \cap s = \emptyset$.
De la misma forma, puesto que $s // t$ existirá un plano π_2 conteniendo s y t, y se cumplirá $s \cap t = \emptyset$.

Si $\pi_1 = \pi_2$ las rectas r y t serán coplanarias. Supongamos que $P \in r \cap t$. Entonces tenemos que r pasa por P y es paralela a s, y t también pasa por P y es paralela a s, luego por el postulado de paralelismo de Hilbert en el espacio, tendremos que r=t, contradiciendo la hipótesis. Así pues, las rectas r y t no tienen ningún punto en común y son coplanarias, es decir, paralelas.

Supongamos que $\pi_1 \neq \pi_2$. Puesto que $r \neq t$, existirá al menos un punto P en t y fuera de r. Sea π el plano que contiene la recta r y pasa por P (Proposición ????)

Por la proposición ???? aplicada a la recta s y el punto P, se pueden dar tres casos:

a) las rectas s y t están contenidas en el plano π. Luego $\pi = \pi_1 = \pi_2$, contradiciendo la hipótesis $\pi_1 \neq \pi_2$.
b) La recta s corta a π en un único punto Q, y la recta t corta a π únicamente en el punto P. Luego la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ estará contenida en π ... ???? ACABAR.
Por lo tanto, el único caso aceptable es:
c) El plano π contiene t y la recta s es paralela a π. Sólo falta ver que r y t no tienen puntos en común. Supongamos que $P \in r \cap t$. En el plano π hay dos rectas paralelas a s que pasan por P, luego por el postulado de paralelismo de Hilbert en el espacio, tendremos que r=t, contradiciendo la hipótesis inicial.

7.3 Axiomas de paralelismo.

7.3.1 Postulado. Postulado de paralelismo euclideo en el plano. Plano incidental euclideo.

En un plano incidental, dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existirá exactamente una recta que pase por A y sea paralela a r.
Un plano incidental euclídeo es un plano incidental que además cumple el postulado de paralelismo euclideo en el plano.

7.3.2 Postulado. Postulado de paralelismo euclideo en el espacio. Espacio incidental euclídeo.
En un espacio incidental, dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existirá exactamente una recta en el plano determinado por r y P que pase por A y sea paralela a r.
Un espacio incidental euclídeo es un espacio incidental que además cumple el postulado de paralelismo euclideo en el espacio.

7.3.3 Postulado. Postulado de paralelismo elíptico en el plano. Plano incidental elíptico.
En un plano incidental, todo par de rectas diferentes se cortan en un único punto, es decir, no hay rectas paralelas.

Un plano incidental elíptico es un plano incidental que además cumple el postulado de paralelismo elíptico en el plano.

7.3.4 Postulado. Postulado de paralelismo elíptico en el espacio.
En un espacio incidental, todo par de rectas diferentes se cortan en un único punto, es decir, no hay rectas paralelas.

7.3.5 Postulado. Postulado de paralelismo hiperbólico en el plano. Plano incidental hiperbólico.
En un plano incidental, dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existirán al menos dos rectas diferentes paralelas a r pasando por P.

Un plano incidental hiperbólico es un plano incidental que además cumple el postulado de paralelismo hiperbólico en el plano.

7.3.6 Postulado. Postulado de paralelismo hiperbólico en el espacio.
En un espacio incidental, dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existirán al menos dos rectas diferentes en el plano determinado por r y P paralelas a r pasando por P.

7.4 Construcción.

7.4.1 Definición. Espacio proyectivo axiomático.

Un espacio proyectivo IP_3 es un conjunto de puntos, una colección de conjuntos de puntos llamados “rectas”, y una colección de conjuntos de puntos llamados “planos” que cumplen los siguientes axiomas:

Axioma EP1: Por cada dos puntos diferentes pasa una única recta. (=PP1)
Axioma EP2: Tres puntos diferentes pertenecen a un único plano.
Axioma EP3: Una recta y un plano se cortan al menos en un punto.
Axioma EP4: Dos planos se cortan al menos en una recta.
Axioma EP5: Existen cuatro puntos que no pertenecen a un mismo plano y para los cuales cualquier subgrupo de tres es no colineal. ($\Rightarrow PP3$)
Axioma EP6: Cada recta tiene al menos tres puntos. (=PP4)

Por lo tanto en un espacio proyectivo axiomático no se cumple el axioma PP2 y dos rectas pueden no tener ningún punto en común, en cuyo caso diremos que **se cortan**.

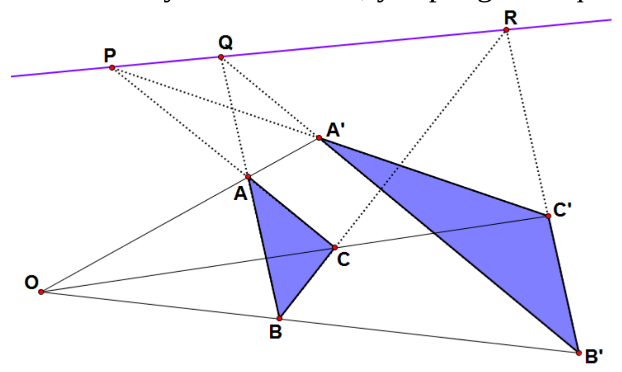
7.4 El Teorema de Desargues en un espacio proyectivo axiomático.

7.4.1 Teorema.
En un espacio proyectivo tridimensional se cumple el postulado de Desargues: Dos triángulos tienen un centro de perspectiva si y sólo si tienen un eje de perspectiva.

Demostración.

Primer caso: Triángulos en planos diferentes, Vértices $\Rightarrow$ Lados:

Sean dos triángulos $\Delta ABC \subset \pi$ y $\Delta A'B'C' \subset \pi'$, y supongamos que $\pi \neq \pi'$.



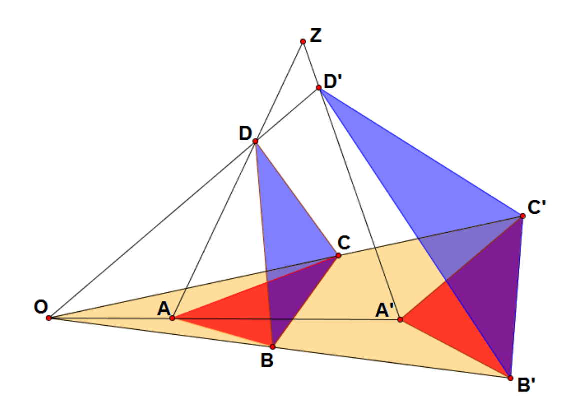
$A' \in \overleftrightarrow{OA}$ y $B' \in \overleftrightarrow{OB}$, luego los puntos A, B, A’, B’ están contenidos en el plano OAB, y por tanto las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$ están en el plano OAB, y en consecuencia se cortarán en un punto Q. Con un razonamiento similar deducimos que las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$ cortarán en un punto P, y las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{B'C'}$ cortarán en un punto R. Los puntos P, Q y R pertenecen simultáneamente a los planos π y π', por lo que su intersección será forzosamente una recta que contendrá los dichos puntos, tal y como queríamos ver.

Segundo caso: Triángulos en planos diferentes, Lados $\Rightarrow$ Vértices:

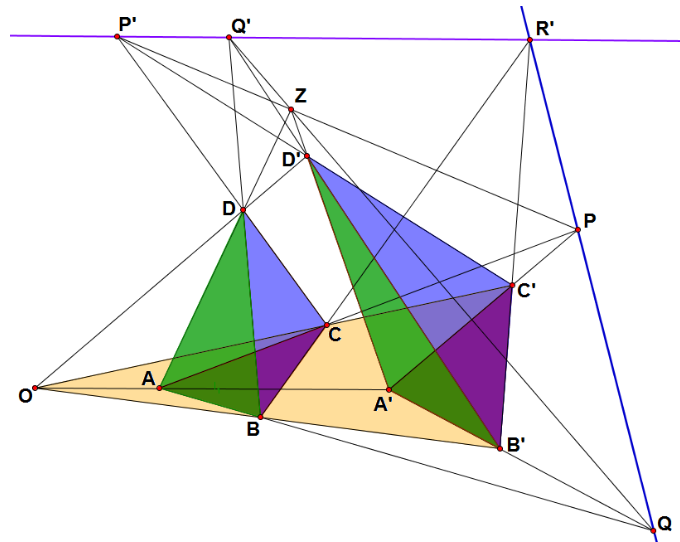
Sean dos triángulos $\Delta ABC \subset \pi$ y $\Delta A'B'C' \subset \pi'$, y supongamos que $\pi \neq \pi'$.
Supongamos que tienen un eje de simetría r.
Sean los tres planos $\pi_1 = <\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{A'B'}>$, $\pi_2 = <\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{A'C'}>$, $\pi_3 = <\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{B'C'}>$ (5.1.5b)
Entonces $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{AA'}$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \overleftrightarrow{BB'}$, y $\pi_2 \cap \pi_3 = \overleftrightarrow{CC'}$ (5.1.4 b)
La recta $\overleftrightarrow{AA'}$ no puede estar contenida en π_3, pues entonces cortaría π en un punto de $\overleftrightarrow{BC}$, y por hipótesis los puntos A, B y C no pueden ser colineales. Luego $\overleftrightarrow{AA'} \cap \pi_3$ es un único punto O. Por lo tanto $\{O\} = \overleftrightarrow{AA'} \cap \pi_3 = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$, es decir, hemos encontrado el centro de perspectiva.

Tercer caso: Triángulos en el mismo plano, Vértices $\Rightarrow$ Lados:

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos contenidos en un mismo plano π. Puesto que estamos en el espacio, podemos tomar un punto Z fuera de este plano y D otro punto de la recta $\overleftrightarrow{AZ}$. Sea $D' = \overleftrightarrow{AZ} \cap \overleftrightarrow{OD}$.



Los triángulos ΔBCD y $\Delta B'C'D'$ tienen el punto O como centro de perspectiva y no pertenecen a un mismo plano.
Luego podemos aplicar el teorema de Desargues para triángulos no coplanares, y deducir que los tres puntos $R' = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$, $Q' = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{B'D'}$ y $P' = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{C'D'}$ están alineados.



Ahora proyectamos estos tres puntos en el plano π a través del punto Z obtendremos tres puntos igualmente alineados:
$P = \overleftrightarrow{P'Z} \cap \pi$, $Q = \overleftrightarrow{Q'Z} \cap \pi$, $R = \overleftrightarrow{R'Z} \cap \pi = R'$.
Q es la intersección $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$. En efecto, los triángulos ΔABD y $\Delta A'B'D'$ tienen el punto O como centro de perspectiva, y no pertenecen a un mismo plano, luego los puntos $Z = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{A'D'}$, $Q' = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{B'D'}$ y $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ están alineados. Luego el punto $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$ será la intersección $\overleftrightarrow{ZQ'} \cap \pi$, tal y como queríamos ver.
Con un razonamiento similar se demuestra que el punto P es la intersección de $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$.

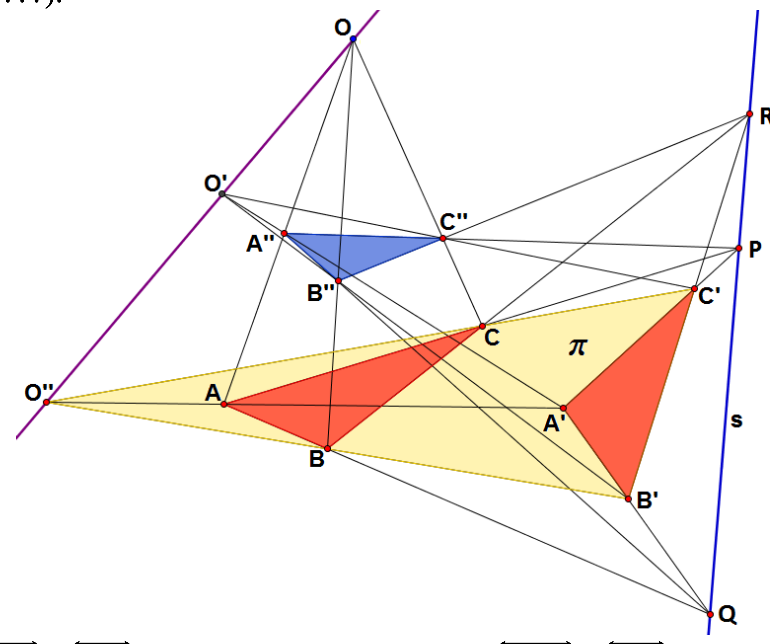
Cuarto caso: Triángulos en el mismo plano, Lados $\Rightarrow$ Vértices:

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos contenidos en un mismo plano π, y supongamos que tienen un eje de perspectiva s. Puesto que estamos en un espacio tridimensional, podemos tomar un plano π' que corte π en s.

Sea O un punto fuera de π y de π' (una recta que pase por un punto de π y de π' tiene un tercer punto fuera de ambos planos).

Sean A'', B'' y C'' los puntos de corte de $\overleftrightarrow{AO}$, $\overleftrightarrow{BO}$ y $\overleftrightarrow{CO}$ con π'. Los triángulos ΔABC y $\Delta A''B''C''$ tienen O como centro de perspectiva, y no están en un mismo plano por construcción, luego podemos aplicar el primer caso de esta misma demostración para deducir que tienen un eje de simetria, que será la misma recta s.

Por lo tanto $\overleftrightarrow{A''C''} \cap \overleftrightarrow{AC}$ será un punto de la recta s que es el punto $P = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ (Demostrar ????).



Así pues, $\overleftrightarrow{A''C''} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = P$, y de la misma manera $\overleftrightarrow{B''C''} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = R$ y $\overleftrightarrow{A''B''} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = Q$, es decir, los triángulos $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A''B''C''$ tienen s como eje de simetría, luego podemos aplicar el tercer caso de esta misma demostración para deducir que tienen un centro de simetría O'.

Los puntos O y O' deben ser diferentes, pues en caso contrario A=A', B=B' y C=C'.

Sea O'' el punto de intersección de $\overleftrightarrow{OO'}$ con π. Veamos que O'' es un centro de simetría para los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$.

Los puntos O', A' y A'' están alineados. Sea π'' el plano que contiene esta recta y el punto O. Los puntos A y O'' también pertenecen a π'', y por lo tanto $O'' \in \pi \cap \pi''$.

Luego la intersección de estos dos planos será una recta. A esta recta pertenecen también los puntos A y A'', como queríamos ver.

De forma similar demostramos la alineación de los otros vértices.

7.4.2 Corolario.

Todo plano proyectivo contenido en un espacio proyectivo tridimensional es arguesiano.

Demostración. Trivial.

7.4.3 Corolario.

Si P es un plano proyectivo arguesiano y r es una recta de P, entonces P\r es un espacio afín arguesiano.

Demostración. Trivial.

7.4.4 Proposición.
Sea V un espacio vectorial de dimensión d+1 sobre un anillo de división F. Entonces el espacio proyectivo P(V) es arguesiano.

Demostración.
Recordemos que un anillo de división es un cuerpo no necesariamente conmutativo.
[???? Beutel]

7.4.5 Proposición.
Un plano proyectivo es arguesiano si y sólo si se puede contener en un espacio proyectivo tridimensional.

Demostración.
[beutel] 81

8 Geometría proyectiva multidimensional.

8.1 Construcción.

8.1.1 Definición. Espacio proyectivo deducido de un espacio vectorial V.

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita, sobre un cuerpo K, se llama espacio proyectivo deducido de V al conjunto P(V) de los subespacios vectoriales de dimensión uno de V; los elementos de un espacio proyectivo se llamarán puntos del mismo, y quedarán definidos por un vector $v \neq 0$ de V, o por cualquiera de sus proporcionales, y escribiremos $P = [v]$.

Es decir, $P(V) = \{P = [v] \mid v \in V, v \neq 0\}$

Dos puntos P, Q de P(V) serán iguales si son el mismo subespacio de V, esto es, $P = [v]$, $Q = [w]$ y $v = \lambda w$ para cierto escalar $\lambda \neq 0$.

$$P \approx \frac{V - \{0\}}{\approx} \quad v \approx w \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 | v = \lambda w$$

8.1.2 Definición. Aplicación canónica.
La aplicación $\pi : V - \{0\} \to P(V)$ que a cada vector no nulo le asocia el subespacio vectorial que él engendra, esto es, $\pi(v) = [v]$, recibe el nombre de aplicación canónica; ella es, evidentemente, sobreyectiva, pero no es inyectiva.

8.1.3 Definición. Variedad lineal proyectiva. Dimensión proyectiva.
Sea P(V) el espacio proyectivo deducido del espacio vectorial V, y sea $\pi : V - \{0\} \to P(V)$ la aplicación canónica.
Llamaremos subespacio proyectivo o variedad lineal proyectiva a cualquier conjunto de P(V) de la forma P(W), donde W es un subespacio vectorial de V.

Diremos que P(V) tiene dimensión n si el subespacio vectorial V tiene dimensión n+1.

Un subespacio P(W) se llama **recta** si el subespacio vectorial W tiene dimensión dos; si el subespacio vectorial W tiene dimensión tres, se dice que el subespacio P(W), deducido de él, es un **plano**. Si W es un subespacio vectorial maximal de V, el subespacio proyectivo P(W) recibe el nombre de **hiperplano**.

8.1.4 Proposición.
Si V es un espacio vectorial de dimensión n+1,
a) Existe una única variedad proyectiva de dimensión n y es el propio P.
b) Existe una única variedad proyectiva de dimensión –1 y es el conjunto vacío $\emptyset$.
c) Si $p \in P$, $\{p\}$ es una variedad proyectiva de dimensión 0, y toda variedad proyectiva de dimensión 0 es de esta forma.

Demostración.
a) Existe un único subespacio vectorial de V de dimensión n+1 que es el propio V, y $[V] = P$.

b) $\varnothing = \pi(\{0\} - \{0\}) = [\{0\}]$
c) $p \in P \Leftrightarrow p = [v] = [< v >], v \in V$, y $\dim(< v >) = 1$

8.1.5 Proposición.
a) Sean H y H' dos subespacios vectoriales de V. Entonces $H \subset H' \Leftrightarrow [H] \subset [H']$. En particular $H = H' \Leftrightarrow [H] = [H']$.
b) $L \subset L' \Rightarrow \dim L \leq \dim L'$.
c) Si $L \subset L'$ y $\dim L = \dim L'$ entonces $L = L'$.

Demostración.

a) $H \subset H' \Rightarrow H - \{0\} \subset H' - \{0\} \Rightarrow [H] = \pi(H - \{0\}) \subset \pi(H' - \{0\}) = [H']$.
Recíprocamente,
$[H] \subset [H'] \Rightarrow \pi^{-1}([H]) \subset \pi^{-1}([H']) \Rightarrow H = \pi^{-1}([H]) \cup \{0\} \subset \pi^{-1}([H']) \cup \{0\} = H'$.

b) Sea $L = [H]$ y $L' = [H']$.
$L \subset L' \Rightarrow H \subset H' \Rightarrow \dim H \leq \dim H' \Rightarrow \dim L = \dim H + 1 \leq \dim H' + 1 = \dim L'$.

c) Sea $L = [H]$ y $L' = [H']$. $L \subset L' \Rightarrow H \subset H'$.
$\dim L = \dim L' \Rightarrow \dim H + 1 \leq \dim H' + 1 \Rightarrow \dim H = \dim H + 1 \Rightarrow H = H' \Rightarrow L = L'$

8.1.6 Proposición. Variedad proyectiva intersección.
Sean $L = [H]$ y $L' = [H']$ dos variedades proyectivas. El conjunto intersección $L \cap L'$ es una variedad proyectiva y se cumple $L \cap L' = [H \cap H']$.

Demostración.

8.1.7 Proposición. Propiedades de la intersección de variedades proyectivas.
La intersección de variedades proyectivas cumple la propiedad asociativa:

$$(L \cap L') \cap L'' = L \cap (L' \cap L'')$$

(Por lo que tiene sentido no escribir los paréntesis y hablar de la variedad proyectiva $L \cap L' \cap L''$)

Y la propiedad conmutativa:

$$L \cap L' = L' \cap L$$

Demostración.

8.1.8 Proposición.
La variedad proyectiva intersección es la variedad proyectiva más grande contenida en todas y cada una de las variedades dadas.

Demostración.

8.1.9 Definición. Variedad proyectiva suma.
Sean $L = [H]$ y $L' = [H']$ dos variedades proyectivas. Definimos la variedad lineal suma como $L \vee L' = [H + H']$.

8.1.10 Proposición.
La variedad proyectiva suma es la variedad proyectiva más pequeña que contiene L y L'.

Demostración.

8.1.11 Proposición. Propiedades de la suma de variedades proyectivas.
La suma de variedades proyectivas cumple la propiedad asociativa:
$$(L \vee L') \vee L'' = L \vee (L' \vee L'')$$
(Por lo que tiene sentido no escribir los paréntesis y hablar de la variedad proyectiva $L \vee L' \vee L''$)

Y la propiedad conmutativa:
$$L \vee L' = L' \vee L$$

8.1.12 Proposición. Fórmula de Grassman.

$$\dim(L) + \dim(L') = \dim(L \cap L') + \dim(L \vee L')$$

Demostración.

8.1.13 Lema.
Si $p \notin L$ entonces $\dim(L \vee p) = \dim L + 1$.

Demostración.

8.1.14 Corolario.
Dos puntos distintos determinan una recta.

Demostración.
Basta aplicar el lema anterior: $\dim(p \vee q) = 1 + 1 = 2$.

8.1.15 Lema.
Si H es un hiperplano y $L \not\subset H$ entonces $\dim(L \cap H) = \dim L - 1$

Demostración.

8.1.16 Proposición.
En un plano proyectivo dos rectas distintas se cortan en un punto (no existe paralelismo).

Demostración.
Aplicando el lema anterior, $\dim(r \cap s) = \dim(r) - 1 = 0$

8.1.17 Proposición. Propiedades del espacio proyectivo tridimensional.

Sea P un espacio proyectivo tridimensional, p, q puntos, r una recta y π un plano.
Con puntos:
a) Si $p \notin r$, entonces $p \vee r$ es un plano.
b) Si $p \neq q$, $p \vee q$ es una recta.
c) Si $p \notin \pi$, $p \vee \pi$ es el propio espacio P.
d) Dos rectas diferentes se cortan en un punto si y sólo si son coplanarias.
e) Si $r \not\subset \pi$, $r \cap \pi$ es un punto y $r \vee \pi$ es todo el espacio.
f) Si $\pi \neq \pi'$, $\pi \cap \pi'$ es una recta y $\pi \vee \pi'$ es todo el espacio.

8.1.18 Definición. Variedades suplementarias.
Diremos que dos variedades L y L' son suplementarias cuando $L \cap L' = \emptyset$ y $L \vee L' = P$.

Podemos substituir cualquiera de estas dos condiciones por $\dim L + \dim L' = n - 1$.

8.1.19 Teorema.
Sea V un espacio vectorial sobre un anillo de división F. Entonces el espacio proyectivo P(V) cumple el postulado de Pappus si y sólo si F es conmutativo (es decir, es un cuerpo).

Demostración.
[Beutel] 37

8.2 Referencias proyectivas. Coordenadas homológicas.

8.2.1 Definición. Subespacio engendrado por una familia de puntos.

Sea C un conjunto de puntos del espacio proyectivo P(V), $C = \{P_i = < v_i >, i \in I\}$
El subespacio proyectivo engendrado por la familia de puntos C es el deducido por el subespacio vectorial W, engendrado por la familia de vectores $\{v_i\ , i \in I\}$.

Es el más pequeño de todos los subespacios proyectivos que contiene todo C.

8.2.2 Dependencia e independencia de puntos.
Decimos que $q_0,...,q_m$ son linealmente independientes en P si $\dim(q_0 \vee ... \vee q_m) = m$.
En caso contrario se dice que $q_0,...,q_m$ son linealmente dependientes.

8.2.3 Proposición
$q_0,...,q_m$ son linealmente independientes si y sólo si $q_i \notin q_0 \vee ... \vee q_{i-1} \vee q_{i+1} \vee ... \vee q_m \ \forall i$.

Demostración.
La justificación de la equivalencia viene del lema 1 de la suma de variedades:

$$\dim(L \vee p) = \begin{cases} \dim L + 1 & si\ p \notin L \\ \dim L & si\ p \in L \end{cases}$$

Luego $\dim(q_{n1} \vee ... \vee q_{nj}) \vee q_k = \begin{cases} j+1 & si\ q_k \notin (q_{n1} \vee ... \vee q_{nj}) \\ j & si\ q_k \in (q_{n1} \vee ... \vee q_{nj}) \end{cases}$

8.2.4 Proposición.
$q_0 = [v_0],..., q_m = [v_m]$ son independientes $\Leftrightarrow v_0,...,v_m$ son vectores linealmente independientes.

Demostración.

$$m = \dim(q_0 \vee ... \vee q_m) = \dim([v_0] \vee ... \vee [v_m]) = \dim(\langle v_0, v_1,..., v_m \rangle) \Leftrightarrow$$
$$\dim(\langle v_0, v_1,..., v_m \rangle) = m+1 \Leftrightarrow v_0, v_1,..., v_m \text{ son lin.indep}.$$

Observaciones:
a) La independencia de los puntos no depende de los representantes escogidos.
b) $v_0, v_1,..., v_m$ son independientes y $q_i = [v_i]$ entonces $q_0,...,q_m$ son independientes.

8.2.5 Corolario.
El número máximo de puntos independientes que puede haber en un espacio proyectivo de dimensión n es n+1.
Por lo tanto, en P^n, $q_0,...,q_m$ independientes $\Rightarrow m \leq n$

Demostración.
Si existieran n+2 puntos independientes, existirían n+2 vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión n+1, lo cual es imposible.

8.2.6 Corolario.

En P^n existen $q_0,...,q_n$ puntos linealmente independientes.

Demostración.
Si $P^n = P(E_{n+1})$, basta determinar una base $e_0,...,e_n$ de E_{n+1} y definir $q_i = [v_i]$.

8.2.7 Corolario.
Si $q_0,...,q_m$ son independientes, cualquier subconjunto $q_{i1},...,q_{ir}$ de puntos diferentes será independiente.

Demostración.
Si estos puntos son independientes, sus representantes también lo serán, y si cogemos menos representantes continuarán siendo independientes, y por lo tanto sus proyecciones (los puntos) también serán independientes.

8.2.8 Introducción.
Sea $P_n = P(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n.
Un conjunto $\{P_0,...,P_n\}$ de n+1 puntos independientes de P_n no determinan una base vectorial de V.

8.2.9 Definición. Referencia proyectiva.
Sea $L \subset P_n$ una variedad lineal proyectiva no vacía de dimensión $r \geq 0$. Un sistema de referencia (proyectivo) en L (o simplemente referencia proyectiva) es un conjunto (ordenado) $R = \{P_0,...,P_r, P_{r+1}\}$ de r+2 puntos de L tales que r+1 cualesquiera de ellos forman una base de L, i.e., son linealmente independientes.

En particular, un sistema de referencia en una recta proyectiva está formado por 3 puntos distintos.

Los n+1 primeros puntos de tal referencia se llaman puntos fundamentales, y el último, a_u, se llama punto unidad.

El siguiente lema garantiza la existencia de sistemas de referencia proyectivos y da un proceso para obtenerlos.

8.2.10 Lema.
Sea $M \subset K^{n+1}$ un subespacio vectorial de dimensión r+1 y sea $S = \{v_0,...,v_{r+1}\}$ un subconjunto de M con r+2 vectores. Las condiciones siguientes son equivalentes:
a) Cualquier subconjunto de S de r+1 vectores es linealmente independiente.
b) El subconjunto $\{v_0,...,v_r\}$ es linealmente independiente y $v_{r+1} = \lambda_0 v_0 + ... + \lambda_r v_r$ con $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = 0,...,r$.

Demostración.
$\Rightarrow$Claramente en particular el subconjunto $\{v_0,...,v_r\}$ será linealmente independiente, luego será base, y por tanto $v_{r+1} = \lambda_0 v_0 + ... + \lambda_r v_r$ para ciertos $\lambda_i \in K$. Si alguno de estos escalares es cero, $\lambda_k = 0$, entonces $v_{r+1} = \lambda_0 v_0 + ... + \lambda_{k-1} v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_r v_r$ y por

tanto el conjunto $\{v_0,...,v_k,v_{k+1},v_r,v_{r+1}\}$ de r+1 vectores no sería independiente, contradiciendo la hipótesis.
$\Leftarrow$Sea $S'=\{v_{i0},...,v_{ir}\}$ un subconjunto de S de r+1 vectores. Si en S' no aparece v_{r+1}, entonces claramente es linealmente independiente puesto que será $\{v_0,...,v_r\}$, que es linealmente independiente por hipótesis.
Luego en este subconjunto aparecerá v_{r+1}.
Supongamos que $S'=S-\{v_r\}$ (el mismo razonamiento valdrá para si quitamos cualquier otro elemento de S)
Supongamos que $0=\mu_0 v_0+\mu_1 v_1+...+\mu_{r-1}v_{r-1}+\mu_{r+1}v_{r+1}$.
Puesto que $v_{r+1}=\lambda_0 v_0+...+\lambda_r v_r$, tenemos

$$0=\mu_0 v_0+\mu_1 v_1+...+\mu_{r-1}v_{r-1}+\mu_{r+1}v_{r+1}=$$
$$\mu_0 v_0+\mu_1 v_1+...+\mu_{r-1}v_{r-1}+\mu_{r+1}(\lambda_0 v_0+...+\lambda_r v_r)=$$
$$\mu_0 v_0+\mu_1 v_1+...+\mu_{r-1}v_{r-1}+\mu_{r+1}\lambda_0 v_0+...+\mu_{r+1}\lambda_r v_r=$$
$$(\mu_0+\mu_{r+1}\lambda_0)v_0+(\mu_1+\mu_{r+1}\lambda_1)v_1+...+(\mu_{r-1}+\mu_{r+1}\lambda_{r-1})v_{r-1}+\mu_{r+1}\lambda_r v_r$$

Pero por hipótesis $\{v_0,...,v_r\}$ es linealmente independiente, luego
$\mu_i+\mu_{r+1}\lambda_i=0\ \forall i=0,...,r-1$
$\mu_{r+1}\lambda_r=0$
$\lambda_r\neq 0$, luego $\mu_{r+1}=0$ y por lo tanto $\mu_i+0\lambda_i=0\Rightarrow\mu_i=0\ \forall i=0,...,r-1$.
Es decir, el conjunto S' es linealmente independiente.

8.2.11 Corolario.
A toda variedad lineal le podemos asociar una referencia proyectiva.

Demostración.
Basta tomar una base $\{v_0,...,v_r\}$ del subespacio vectorial asociado, y tomar $v_{r+1}=v_0+...+v_r$. Los puntos $P_i=[v_i]$ serán un sistema de referencia por el lema anterior.

8.2.12 Definición. Base normalizada asociada a un sistema de referencia.
Dado un sistema de referencia $R=\{P_0,...,P_r,P_{r+1}\}$ de $P(V)$, diremos que $B=\{v_0,...,v_r\}\subset V$ es una base normalizada de R si se verifica que
a) $P_i=[v_i]\ \forall i=0,...,r$
b) $P_{r+1}=[v_0+...+v_r]$

8.2.13 Proposición.
Sea $R=\{P_0,...,P_r,P_{r+1}\}$ un sistema de referencia de L. Se tiene:
a) R tiene bases normalizadas.
b) Si $B=\{v_0,...,v_r\}$ y $B'=\{v'_0,...,v'_r\}$ son dos bases normalizadas de R, existe un escalar $\lambda\neq 0$ tal que $v_i=\lambda v'_i$ para todo $i=0....,r$.

Demostración.

a) Sean w_i vectores cualesquiera de V tales que $P_i = [w_i]$ $i = 0,...,r+1$. Por el lema anterior sabemos que podemos escribir $w_{r+1} = \lambda_0 w_0 + ... + \lambda_r w_r$ para ciertos $\lambda_i \neq 0$, luego definiendo $v_i = \lambda_i w_i$ para todo $i = 0,...,r$, y definiendo $v_{r+1} = w_{r+1}$, tenemos $P_i = [w_i] = [v_i]$ y $P_{r+1} = [w_{r+1}] = [\lambda_0 w_0 + ... + \lambda_r w_r]$, es decir, $B = \{v_0,...,v_r\}$ es una base normalizada.
b) Tenemos que $P_i = [v_i] = [v'_i]$ para todo $i = 0....,r$, luego $v_i = \lambda_i v'_i$, $\lambda_i \neq 0$, y por tanto $v_0 + ... + v_r = \lambda_0 v'_0 + ... + \lambda_r v'_r$
$P_{r+1} = [v_0 + ... + v_r] = [v'_0 + ... + v'_r]$, luego $v_0 + ... + v_r = \lambda(v'_0 + ... + v'_r)$ con $\lambda \neq 0$.
Comparando las dos expresiones del mismo vector $v_0 + ... + v_r$, y teniendo en cuenta que $B' = \{v'_0,...,v'_r\}$ es una base, llegamos a la conclusión de que $\lambda_i = \lambda$ $\forall i$.

8.2.14 Definición. Coordenadas homogéneas de un punto.
Sea $R = \{P_0,...,P_r,P_{r+1}\}$ un sistema de referencia de L, y sea $P \in L$. Sea además $B = \{v_0,...,v_r\}$ una base normalizada de R. Se dirá que las coordenadas de P respecto de R son $(x_0 : \cdots : x_r)$ si se verifica que

$$P = [x_0 v_0 + ... + x_r v_r]$$

Es decir, las coordenadas de P respecto de R son las de un vector de P respecto de una base normalizada de R. Es imprescindible notar que las coordenadas de P no dependen de la base normalizada elegida de R.

Evidentemente, respecto de una referencia proyectiva $R = \{P_0,...,P_r,P_{r+1}\}$ sus puntos fundamentales admiten las siguientes coordenadas:
$P_0 = (1:0:0:...:0)$, $P_1 = (0:1:0:...:0)$, $P_2 = (0:0:1:...:0)$, ... , $P_r = (0:0:0:...:1)$; y su punto unidad tiene por coordenadas a $P_{r+1} = (1:1:1:...:1)$, de ahí el calificativo de "unidad" con el que se le designa.

8.2.15 Proposición. Cambio de coordenadas.
Sean R y R' dos sistemas de referencia de la variedad lineal proyectiva $L \subset P_n$, y sea $P \in L$ un punto de coordenadas $(x_0 : \cdots : x_r)$ respecto de R y $(x'_0 : \cdots : x'_r)$ respecto de R'. Entonces, se tiene que, existe un $\lambda \neq 0$ tal que

$$\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_r \end{pmatrix}$$

donde M es la matriz de cambio de una base normalizada B de R a una base normalizada B' de R'.

Demostración.
Basta recordar que las coordenadas de P respecto R son las de un vector u respecto B, y las de P respecto R' las de un vector v respecto B', con $P = [u] = [v]$, y por tanto, existe un $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda u = v$. El cambio de base de B a B' en K^{n+1} hace el resto.

8.2.16 Definición. Símplex.
Sea P(V) un espacio proyectivo de dimensión $n \geq 1$ sobre un cuerpo K.
Tómese en él $n+1$ puntos independientes

$$P_0 = \langle u_0 \rangle, P_1 = \langle u_1 \rangle, \ldots, P_n = \langle u_n \rangle$$

y otro punto más $P = \langle u \rangle$ con la propiedad de no pertenecer a ninguno de los hiperplanos engendrados por n de entre los primeros $n+1$ puntos.

Un símplex fabrica un sistema de coordenadas homogéneas de puntos de base $P_0, \ldots, P_n$ y punto unidad P. En general, a la configuración de los $n+2$ puntos anteriores se le denomina un símplex.

En cualquier caso, los vectores $u_0, \ldots, u_n$ determinan una base de V en la cual se expresa mediante $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ con todos los escalares λ_i distintos de cero. Póngase ahora $P_i = \langle v_i \rangle$, con cada $v_i = \lambda_i u_i$ y considérese el sistema de coordenadas homogéneas $\{v_0, \ldots, v_n\}$ en el cual el punto P tiene a $(1,1,\ldots,1)$ por coordenadas.

8.2.17 Representación implícita de una variedad lineal.
Sea un espacio proyectivo P(E) de dimensión n.
Hemos fijado una referencia proyectiva y sea $\{v_0, ..., v_n\}$ una base de E adaptada a la referencia.
Sea $V \subset P(E)$ una variedad lineal, $V = [F]$ para cierto subespacio vectorial $F \subset E$, $\dim F = d$.
Queremos saber si un punto dado $(x_0 : \ldots : x_r) \in P(E)$ pertenece o no a V.
Consideremos

$$\varphi : E \to E/F$$
$$v \mapsto \bar{v}$$

φ es una aplicación lineal, $\dim(E/F) = \dim E - \dim F = (n+1) - d - 1 = n - d$.
Sea M la matriz de φ en las bases $\{v_0, ..., v_n\}$ y $\{\bar{v}'_0, ..., \bar{v}'_{n-d}\}$

$$M = \begin{pmatrix} a_0^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^{n-d} & \cdots & a_n^{n-d} \end{pmatrix}$$

$$X = (x_0 : \ldots : x_r) = [v] \in V \Leftrightarrow v \in F = \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_0^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^{n-d} & \cdots & a_n^{n-d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{c} a_0^1 x_0 + ... + a_n^1 x_n = 0 \\ ... \\ a_0^{n-d} x_0 + ... + a_n^{n-d} x_n = 0 \end{array} \right\}$$

Recíprocamente, en un espacio proyectivo P(E) con una referencia fijada, el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo

$$\left.\begin{array}{c} a_0^1 x_0 + \ldots + a_n^1 x_n = 0 \\ \ldots \\ a_0^{n-d} x_0 + \ldots + a_n^{n-d} x_n = 0 \end{array}\right\}$$

es una variedad lineal de dimensión $(n+1) - Rang\ M - 1 = n - Rang\ M$.

8.2.18 Representación paramétrica de una variedad lineal.
Sea P(V) un espacio proyectivo de dimensión n.
Sea $R = \{P_0, ..., P_n, P_{n+1}\}$ un sistema de referencia de P(V), y sea $B = \{v_0, ..., v_n\}$ una base normalizada de R .

Sea F una variedad lineal de P(V) de dimensión d. Entonces $F = [H]$ para cierto subespacio vectorial H de dimensión $d+1$, luego $H = \langle v_0, \ldots, v_d \rangle$ para ciertos vectores $v_0, \ldots, v_d$ linealmente independientes.
$X = [w] \in F \Leftrightarrow w \in \langle v_0, \ldots, v_d \rangle \Leftrightarrow \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in K, w = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_d v_d$
Si $v_i = (v_i^0, \ldots, v_i^n)$ y $w = (w_0, \ldots, w_n)$ en la base B, entonces

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} v_0^0 \\ \vdots \\ v_0^n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^0 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_d \begin{pmatrix} v_d^0 \\ \vdots \\ v_d^n \end{pmatrix} \quad (*)$$

Este sistema puede ser visto como el de las coordenadas de X en función de las coordenadas de $P_i = [v_i]$, cumpliendo $F = P_0 \vee \ldots \vee P_d$.
Las ecuaciones del sistema (*), cuando $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_d)$ recorre $K^{d+1} - \{(0,0,...,0)\}$, proporcionan todos los puntos de la variedad lineal y sólo los de ella.

Proposición. Paso de una representación implícita a una paramétrica.

Proposición. Paso de una representación paramétrica a una implícita.

Definición. Rectas.
Se llaman rectas de un espacio proyectivo a sus subespacios proyectivos de dimensión unidad.

Un par de puntos $P = <v>$ y $Q = <w>$ son dependientes cuando los vectores v y w sean proporcionales, esto es, cuando los puntos coincidan; en tal caso, constituyen una familia de rango cero. Si dos puntos son distintos, entonces son independientes y forman una familia de rango unidad; en este supuesto, el subespacio proyectivo que engendran tiene dimensión unidad, es decir, se trata de una recta, la cual es, pues, el menos amplio de todos los subespacios proyectivos que contienen a los dos puntos. Por dos puntos distintos pasa, pues, una única recta, que es el subespacio proyectivo $R = P(W), W = <v, w>$, deducido del espacio vectorial engendrado por los vectores v y w; dicha recta es, pues

$$R = \left\{ < \alpha v + \beta w > \mid (\alpha, \beta) \in K^2, (\alpha, \beta) \neq (0,0) \right\}$$

Definición. Hiperplanos.

8.3 El espacio afín en el contexto proyectivo.

8.3.1 Proposición. Inmersión del espacio afín en el proyectivo.

Sea el espacio afín A^n asociado al espacio vectorial E, $\dim_K(E)=n$.
Al escoger un origen $O \in A^n$ podemos escribir

$$A^n = \{O+\vec{v} \mid \vec{v} \in E\}$$

Ahora sea $K \oplus E$ espacio vectorial de dimensión n+1 (pues K es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre sí mismo).

Sea la aplicación:

$$j : A^n \to P(K \oplus E) = P^n$$
$$O+\vec{v} \to [(1,\vec{v})]$$

Está bien definida, y es biyectiva:

$$j(O+\vec{v}) = j(O+\vec{w}) \Rightarrow [(1,\vec{v})] = [(1,\vec{w})] \Rightarrow \exists \lambda \in K, (1,\vec{v}) = \lambda(1,\vec{w}) = (\lambda, \lambda\vec{w}) \Rightarrow$$
$$\lambda = 1 \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$$

$$A^n \overset{\sigma_O}{\to} E \to K \oplus E \to P(K \oplus E)$$
$$X \mapsto \overrightarrow{OX} \to \left(1,\overrightarrow{OX}\right) \to \left[\left(1,\overrightarrow{OX}\right)\right]$$

8.3.2 Definición. Hiperplano del infinito.
Tiene sentido, después de hacer la identificación, hablar del conjunto $P^n - A^n$, que son los puntos con la primera coordenada igual a 0:

$$P^n - A^n = \{[(0,\vec{v})] \forall \vec{v} \in E\} = [(0) \oplus E]$$

Dicho conjunto tiene dimensión n (es un hiperplano) y recibe el nombre de hiperplano del infinito π_∞:

$$\pi_\infty = P^n - A^n$$

8.4 Dualidad. “Duality”.

8.4.1 Definición. Espacio Dual.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Definimos el espacio dual asociado a V como

$$V^* = L(V,K) = \{\text{funciones} \quad \text{lineales} \quad \mathrm{V} \to \mathrm{K}\}$$

8.4.2 Proposición. Base dual.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre K, y sea $v_1, \ldots, v_n$ una base de V. Definimos $v_i^* \in V^*$ por

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si\, i \neq j \\ 1 & si\, i = j \end{cases}$$

función que extendemos linealmente a todo V, es decir $v_i^*(\sum_j \lambda_j v_j) = \lambda_i$

El conjunto $v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*$ forma una base de V^*, llamada base dual de $v_1, \ldots, v_n$.
En particular $\dim V = \dim V^*$.

Demostración.
Independencia: Supongamos que $\sum_j \lambda_j v_j^* = 0$. Entonces

$0 = \left(\sum_j \lambda_j v_j^*\right)(v_i) = \sum_j \lambda_j v_j^*(v_i) = \lambda_i \quad \forall i$, es decir, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Generación: Sea $f \in V^*$, y sean $\lambda_j = f(v_j)$, $1 \leq j \leq n$. Entonces $f = \sum_j \lambda_j v_j^*$. Por linealidad, sólo tendremos que demostrarlo para $v = v_j$. En efecto,

$$f(v_j) = \lambda_j = \sum_j \lambda_j v_j^*(v_j) = \left(\sum_j \lambda_j v_j^*\right)(v_j)$$

Observaciones.
a) En general se puede demostrar que $\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.
b) Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, $V \cong V^*$, como lo son todos los espacios vectoriales que tienen la misma dimensión, pero no son canónicamente isomorfos, es decir, no hay ningún isomorfismo natural entre ellos.

Definición.
Sean V y W dos espacios vectorials sobre K, y sea una aplicación lineal $\alpha : V \to W$, es decir, $\alpha \in L(V,W)$. Definimos $\alpha^* : W^* \to V^* \in L(W^*, V^*)$ por
$\alpha^*(f) = f \circ \alpha$

Lema.
Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y sean $v_1, \ldots, v_n$ una base de V y $w_1, \ldots, w_m$ una base de W.
Sean $v_1^*, \ldots, v_n^*$ y $w_1^*, \ldots, w_m^*$ las bases duales respectivas de V* y W*.

Si $\alpha : V \to W$ es una aplicación lineal , y A es su matriz asociada respecto de las bases v_i y w_j, entonces A^T será la matriz asociada a $\alpha *$ respecto de las bases w_j^* y v_i^*.

8.4.1 Definición. Aplicaciones bilineales no degeneradas.
Sean E y F dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y sea una aplicación

$$\psi : E \times F \to K$$

Diremos que ψ es bilineal cuando cumpla

a) $\psi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \psi(x, z) + \mu \psi(x, z)$
b) $\psi(z, \lambda x + \mu y) = \lambda \psi(z, x) + \mu \psi(z, y)$

es decir, cuando fijado un $x \in E$ y un $y \in F$, las aplicaciones $\psi(x, \ ) : F \to K$ y $\psi(\ , y) : E \to K$ sean lineales. En cuyo caso

$x \to \psi(x, \ )$ es una aplicación $E \to F *$ (1)
$y \to \psi(\ , y)$ es una aplicación $F \to E *$ (2)

Ambas aplicaciones son lineales como se comprueba sin dificultad.

Diremos que es bilineal no degenerada cuando además cumpla

c) $\psi(x, y) = 0 \ \forall x \in E \Rightarrow y = 0$
d) $\psi(x, y) = 0 \ \forall y \in E \Rightarrow x = 0$

El hecho de que ψ sea no degenerada lleva consigo que $\psi(x, \ ) = 0$ si y sólo si $x = 0$, y $\psi(\ , y) = 0$ si y sólo si $y = 0$ luego las aplicaciones (1) y (2) son monomorfismos. Además, si los espacios vectoriales son de dimensión finita se verificará $\dim F \le \dim E^* = \dim E \le \dim F^* = \dim F$, luego $\dim F = \dim E$ y por tanto las aplicaciones (1) y (2) son isomorfismos.

Fijada la aplicación ψ los isomorfismos (1) y (2) permiten considerar E como dual de F y F como dual de E.

Definición. Ortogonalidad.
Sea $\langle \ , \ \rangle : E \times F \to K$ una aplicación bilineal no degenerada (podemos identificar $E = F *$ y $F = E *$).
Si A es un subconjunto de E, llamamos ortogonal de A, y escribiremos $A^\perp$, al conjunto de elementos $y \in F$ tales que $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in A$, es decir

$$A^\perp = \{ y \in F \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in A \}$$

Análogamente, si B es un subconjunto de F,

$$B^{\perp} = \{x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \; \forall y \in B\}$$

Proposición.
$A^{\perp}$ es un subespacio de F y $A^{\perp}$ es un subespacio de E.

Demostración.
Sean $\lambda, \mu \in K$ y $x, y \in A^{\perp}$.
$\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, x \rangle = 0 \; \forall z \in A$, luego $\lambda x + \mu y \in A^{\perp}$
Análogamente se demuestra que $B^{\perp}$ es un subespacio de E.

Proposición.
Si A es un subespacio de E, entonces $\dim A + \dim A^{\perp} = \dim E$

Demostración.
Sea $e_1, \ldots, e_m$ una base de A. Por el teorema de Steinitz, esta base se puede completar para tener una base $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ de E. Sea $e'_1, \ldots, e'_m, e'_{m+1}, \ldots, e'_n$ la base dual de la anterior. Entonces $e'_{m+1}, \ldots, e'_n$ es una base de $A^{\perp}$.

Proposición.
Sean A y B subespacios de E y F respectivamente.
a) $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$
b) $A^{\perp\perp} = A$

Demostración.
a) Es inmediata. Supongamos que $y \in B^{\perp}$. Entonces $\langle x, y \rangle = 0 \; \forall x \in B$, pero puesto que $A \subset B$, tenemos que $\langle x, y \rangle = 0 \; \forall x \in A$, es decir $y \in A^{\perp}$.
b) Observemos que si $x \in A$ entonces $\langle x, y \rangle = 0 \; \forall y \in A^{\perp}$, luego $x \in A^{\perp\perp}$, es decir, $A \subset A^{\perp\perp}$. Además, por la proposición anterior tenemos
$\dim A + \dim A^{\perp} = \dim E = \dim F$
$\dim A^{\perp} + \dim A^{\perp\perp} = \dim E = \dim F$
luego $\dim A = \dim A^{\perp\perp}$ y por tanto $A = A^{\perp\perp}$.

Teorema. El isomorfismo canónico entre E y E.**
Sea E un espacio vectorial de dimensión finita e igual a n.
Sean E^* y E^{**} el dual y el bidual respectivamente de este espacio.
Sea f la función en la que a cada $x \in E$ le hacemos corresponder la aplicación

$$f_x : E^* \to K$$

definida por

$$f_x(y) = y(x) \in K \quad \forall y \in E^*$$

a) La aplicación f_x es lineal.
En efecto, si $\lambda, \mu \in K$ y $y, z \in E^*$, tenemos, $\forall x \in E$,

$$f_x(\lambda y + \mu z) = (\lambda y + \mu z)(x) = \lambda y(x) + \mu z(x) = \lambda f_x(y) + \mu f_x(z)$$

Luego f es una aplicación de E en E^{**}.

b) La aplicación f es un isomorfismo entre E en E^{**}.
Veamos en primer lugar que es lineal:
si $\lambda, \mu \in K$, $x, y \in E$, $\omega \in E^*$,
$f(\lambda x+\mu y)(\omega)=\omega(\lambda x+\mu y)=\lambda\omega(x)+\mu\omega(y)=\lambda f(x)(\omega)+\mu f(x)(\omega)=\left(\lambda f(x)+\mu f(x)\right)(\omega)$

Además, si $f(x)=0 \Rightarrow f(x)(\omega)=0 \Rightarrow \omega(x)=0 \Rightarrow \omega(x)=0\ \forall\omega\in E^* \Rightarrow x=0$. De lo contrario, existiría una forma lineal que transformaría x en un elemento no nulo de K. Luego f es un monomorfismo, y puesto que E y E* tienen la misma dimensión, f es un isomorfismo.

Este isomorfismo nos permite identificar E con E** con lo que cada elemento de E puede considerarse como una forma lineal en E*. Hecha esta identificación escribiremos x en lugar de f_x, es decir . En otras palabras, si consideramos la aplicación $E\times E^* \rightarrow K$ definida por $\langle x, y'\rangle = y'(x)=x(y')$, al considerar x fijo se tiene una aplicación $E^* \xrightarrow{\langle x,\ \rangle} K$ que es el elemento f_x de E**, y al considerar y fijo se tiene una aplicación $E \xrightarrow{\langle\ ,x\rangle} K$ que es el elemento y de E*.

La aplicación $\langle\ ,\ \rangle$ es bilineal no degenerada, luego podemos aplicar las proposiciones ya dadas, en especial aquella que dice que para todo subespacio $A\subset E$, se cumple $A^{\perp\perp}=A$.

8.4.1 Definición. Espacio proyectivo dual.
Sea un espacio proyectivo $P=P(E)$, donde E es un espacio vectorial de dimensión n+1.
Definimos el espacio proyectivo dual como la proyectivización del espacio vectorial E^*, el espacio dual de E:

$$P^*=P(E^*)$$

8.4.2 Definición. Relación entre P y P*.
Sea $P=P(E)$ un espacio proyectivo de dimensión n, y $P^*=P(E^*)$ su espacio dual.
Tenemos una aplicación natural biyectiva entre P y P* definida por:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{(\ )^{\perp}} & E^* \\ [\ ]\downarrow & & \downarrow[\ ] \\ P(E) & \rightarrow & P^* \end{array}$$

Es decir, $\forall L=[H]\in P$, $L^*=[H^{\perp}]\in P^*$.

8.4.3. Proposición.
Mediante la aplicación anterior, toda variedad V lineal de P se puede considerar como una variedad lineal V* de P* con los cambios siguientes:
a) $\dim V^* = n-\dim V-1$

b) $V_1 \subset V_2 \Leftrightarrow V_2^* \subset V_1^*$
c) $(V_1 \vee V_2)^* = V_1^* \cap V_2^*$
d) $(V_1 \cap V_2)^* = V_1^* \vee V_2^*$

Corolario.
En particular, tenemos una biyección entre los hiperplanos de P y los puntos de P^*, por lo que puedo dotar al conjunto de hiperplanos de P de una estructura de espacio proyectivo: Basta verlos como puntos en el espacio dual.

Sea $P = P(E)$ un espacio proyectivo. Definimos $P^\vee$ como el conjunto de hiperplanos de P.

A $P^\vee$ se le puede dotar de estructura de espacio proyectivo. Para ello utilizaremos como espacio vectorial estructural a $E^\vee$, el espacio dual de E, y definimos la aplicación estructural π:

$$\pi : E - \{0\} \to P^\vee$$
$$\omega \mapsto [Ker\omega]$$

- La aplicación está bien definida:
$[Ker\omega]$ es un hiperplano de $P(E)$ pues $Ker\omega$ es un subespacio vectorial de dimensión $n-1$. Esto se deduce del hecho de que todas las formas no nulas son exhaustivas, y por tanto $\dim Ker\omega = \dim E - \dim \operatorname{Im}\omega = \dim E - 1 = n-1$.

-La aplicación es exhaustiva:
Sea $[H]$ un hiperplano de $P(E)$. Veamos que podemos encontrar una antiimagen de H por π:
Si $H \subset E$ es un subespacio de dimensión $dium(H) = n-1$, entonces
$\dim\left(\frac{E}{H}\right) = 1 \Rightarrow \frac{E}{H} \cong K$.
Sea $\omega : E \to \frac{E}{H} = K$ la proyección.
Es una aplicación lineal y no nula, luego tenemos que $Ker\omega = H$, por construcción de la aplicación proyección. Es decir, $H = \pi(\omega)$.

- Se cumple la proporcionalidad:
Queremos ver $[Ker\omega] = [Ker\omega'] \Leftrightarrow \exists \lambda \in K - \{0\} | \omega = \lambda\omega'$.
$\Leftarrow \omega = \lambda\omega'$ luego $Ker\omega = Ker(\lambda\omega') = Ker(\omega') \Rightarrow \pi(\omega) = \pi(\omega')$
$\Rightarrow$Supongamos que $Ker\omega = Ker\omega'$.
Supongamos que no se cumple la proporcionalidad, es decir $\forall \lambda \in K - \{0\} | \omega \neq \lambda\omega'$.
Sea $v \in E$ cumpliendo $v \notin Ker\omega$, y sea $\mu = \frac{\omega'(v)}{\omega(v)}$
Luego existe $w \in E$, $w \notin Ker\omega$, tal que $\frac{\omega'(v)}{\omega(v)} \neq \mu$, puesto que $\omega \neq \lambda\omega'$.
$\frac{\omega'(v)}{\omega(v)} \neq \frac{\omega'(w)}{\omega(w)} \Rightarrow a = \frac{\omega'(v)}{\omega'(w)} \neq \frac{\omega(v)}{\omega(w)}$

Sea ahora el vector $v - aw$

$$\omega'(v-aw) = \omega'(v) - a\omega'(w) = \omega'(v) - \frac{\omega'(v)}{\omega'(w)}\omega'(w) = \omega'(v) - \omega'(v) = 0$$

Pero $\omega(v-aw) \neq 0$ pues $\dfrac{\omega'(v)}{\omega'(w)} \neq \dfrac{\omega(v)}{\omega(w)}$

Teorema. Principio de dualidad.
Hemos establecido una biyección

$$\{\text{Variedades lineales de } P\} \leftrightarrow \{\text{Variedades lineales de } P^*\}$$
$$L \rightarrow L^*$$
$$W^* \leftarrow W$$

Con la cual toda variedad lineal de P se puede considerar como una variedad lineal de P* con los cambios siguientes:

a) $\dim V^* = n - \dim V - 1$
b) $V_1 \subset V_2 \Leftrightarrow V_2^* \subset V_1^*$
c) $(V_1 \vee V_2)^* = V_1^* \cap V_2^*$
d) $(V_1 \cap V_2)^* = V_1^* \vee V_2^*$

Sea $\wp$ una proposición de la geometría proyectiva en la que intervengan variedades lineales, relaciones de contención $\subseteq, \supseteq$ y las operaciones suma y intersección $\vee, \wedge$. Diremos proposición dual de $\wp$, y escribiremos $\wp^*$ a la que se obtiene de $\wp$ haciendo los siguientes cambios:

$$\wp \rightarrow \wp^*$$
$$\cap \rightarrow \vee$$
$$\vee \rightarrow \cap$$
$$\subseteq \rightarrow \supseteq$$
$$\supseteq \rightarrow \subseteq$$

y donde diga "variedad de dim. d" $\rightarrow$"variedad de dim. $n-d-1$"

Observación: Un teorema de la geometría proyectiva es una implicación $\wp \Rightarrow \wp'$

Principio de dualidad:
Si $\wp \Rightarrow \wp'$ es un teorema de la geometría proyectiva, entonces $\wp'^* \Rightarrow \wp^*$ es un teorema de la geometría proyectiva

Ejemplo:
En el plano proyectivo:

Teorema: "Dos rectas de P^2 se cortan en un único punto"
Teorema dual: "Por cada dos puntos de P^2 pasa una única recta".

Demostración:
El teorema dual sólo es el teorema original en P pensado en P* y vuelto a traducir a P.

Coordenadas en el espacio dual.
Sea $R=(P_0,\ldots,P_n;A)$ una referencia de $P(E)$.
Esta referencia determian unas coordenadas $(x_0:\ldots:x_n)$ para todo punto de $P(E)$.
Los hiperplanos $H_i=\{x_i=0\},\ i=0,\ldots,n$, $U=\{x_0+\ldots+x_n=0\}$ forman una referencia $R^\vee=(H_0,\ldots,H_n;U)$ que se llama referencia dual.
Y el hiperplano $a_0x_0+\ldots+a_nx_n=0$ pasa a ser el punto $(a_0:\ldots:a_n)\in P(E)^\vee$ según $R^\vee$.

Demostración.
Sea $H=\{a_0x_0+\ldots+a_nx_n=0\}$, luego $H=\left[Ker\left(a_0e_0^*+\ldots+a_ne_n^*\right)\right]$
Efectivamente,
$X=(x_0:\ldots:x_n)=[x_0e_0+\ldots+x_ne_n]\in H \Leftrightarrow$
$a_0x_0+\ldots+a_nx_n=0 \Leftrightarrow$
$\left(a_0e_0^*+\ldots+a_ne_n^*\right)\left(x_0e_0+\ldots+x_ne_n\right)=0 \Leftrightarrow$
$x_0e_0+\ldots+x_ne_n\in Ker\left(a_0e_0^*+\ldots+a_ne_n^*\right)$

Luego $H=\left[Ker\left(a_0e_0^*+\ldots+a_ne_n^*\right)\right]=\left[a_0e_0^*+\ldots+a_ne_n^*\right]$

Corolario.
Con el resultado anterior es fácil ver que
$R^\vee=\left(H_0=[e_0^*],H_1=[e_1^*],\ldots,H_n=[e_n^*];U=[e_0^*+...+e_n^*]\right)$
determina una referencia del espacio dual dependiendo de una referencia R de $P(E)$.

Ejemplos.
Sea $Q=(\lambda_0:\lambda_1:\lambda_2)\in P^2$.
¿Qué estructura tiene en $\left(P^2\right)^\vee$ las rectas que pasan por Q?

Una recta que pasa por Q ha de satisfacer la ecuación en x_i:
$$\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=0$$
dicha recta tiene como coordenadas en $\left(P^2\right)^\vee$ a $(\lambda_0:\lambda_1:\lambda_2)$

Luego las rectas buscadas son los puntos del dual $(y_0:y_1:y_2)$ tales que
$$\lambda_0y_0+\lambda_1y_1+\lambda_2y_2=0$$
es decir, la recta (del dual) $\lambda_0y_0+\lambda_1y_1+\lambda_2y_2=0$.

En general:
Fijamos un punto $Q=(\lambda_0:\ldots:\lambda_n)\in P^n$.
El conjunto de hiperplanos de P^n que pasan por Q forma, en $\left(P^n\right)^\vee$, un hiperplano con ecuación $\lambda_0y_0+\ldots+\lambda_ny_n=0$

Proposición. Caracterización geométrica de una variedad lineal.
Sea $L \subset P^n(E)$ una variedad lineal. Entonces L^* es el conjunto de hiperplanos que pasan por L.

Demostración.
Supongamos que $L = [H]$. Luego $L^* = [H^{\perp}]$.
$[w] \in L^* \Leftrightarrow w \in H^{\perp} \Leftrightarrow \langle H, w \rangle = 0 \Leftrightarrow H \subset Ker\, w \Leftrightarrow L = [H] \subset [Ker\, w]$, el hiperplano asociado a $[w]$.

Ejemplos:
a) L es un hiperplano de P^n.
$\dim L^* = n - (n-1) - 1 = 0 \Rightarrow L^*$ es un punto (el propio hiperplano).

b) L es un punto de P^n.
$\dim L^* = n - 0 - 1 = n - 1 \Rightarrow L^*$ es un hiperplano.

c) El fajo de planos de P^2 que contiene a la recta L es una recta en $\left(P^3\right)^{\vee}$.
$\dim L^* = 3 - 1 - 1 = 1 \Rightarrow L^*$ es una recta.

Observación. Eje de una variedad.
Inversamente, para toda variedad lineal $W \subset P(E^{\vee})$ existirá una única variedad lineal $L \subset P(E)$ tal que $W = L^*$. Llamamos a L el eje de W.

Si $W = [G]$, $L = [G^{\perp}]$ cumple $L^* = W$.
Se demuestra que $L = \bigcap_{\alpha \in W} H_{\alpha}$.

8.5 Proyectividades. “Proyective transformations”.

8.5.1 Definición. Proyectividad.

Dados dos espacios proyectivos P(V) y P(V’), de un isomorfismo $\varphi : V \to V'$ se deduce una función $[\varphi] : P(V) \to P(V')$

$$f_{\varphi} = [\varphi] : P(V) \to P(V')$$
$$[v] \mapsto [\varphi(v)]$$

pues

$$[v] = [w], v, w \in V \Rightarrow v = \lambda w \Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda w) = \lambda \varphi(w)$$
$$\Rightarrow [\varphi(v)] = [\varphi(\lambda w)] = [\lambda \varphi(w)] = [\varphi(w)]$$

Llamaremos **proyectividad** a toda función $f : P(V) \to P(V')$ tal que $f = [\varphi]$ para cierto isomorfismo $\varphi : V \to V'$.

La existencia de proyectividades implica la existencia de isomorfismos, luego ambos espacios vectoriales serán isomorfos y por tanto tendrán la misma dimensión.

8.5.2 Definición. Homografías.

Llamaremmos homografías a las proyectividades de un espacio proyectivo en sí mismo, es decir, cuando $V = V'$.

Las homografías de P(V) forman un grupo:

$$[\varphi \circ \psi] = [\varphi] \circ [\psi]$$
$$[Id_V] = Id_{P(V)}$$
$$[\varphi^{-1}] = [\varphi]^{-1}$$

8.5.3 Proposición.

Los conceptos de suma e intersección son invariantes por proyectividades, es decir:

$$f(L \cap L') = f(L) \cap f(L')$$
$$f(L \vee L') = f(L) \vee f(L')$$

Demostración.

Sea $f = [\varphi]$, $L = [H]$, $L' = [H']$.

$$f(L \cap L') = f([H] \cap [H']) = f([H \cap H']) =$$
$$= [\varphi(H \cap H')] = [\varphi(H) \cap \varphi(H')] = [\varphi(H)] \cap [\varphi(H')] = f(L) \cap f(L')$$

y de la misma forma:

$$f(L \vee L') = f([H] \vee [H']) = f([H + H']) =$$
$$= [\varphi(H + H')] = [\varphi(H) + \varphi(H')] = [\varphi(H)] \vee [\varphi(H')] = f(L) \vee f(L')$$

8.5.4 Corolario. Proyectividades e independencia lineal de puntos.

$P_0, \ldots, P_n$ son puntos linealmente independientes $\Leftrightarrow$ $f(P_0), \ldots, f(P_n)$ son puntos linealmente independientes.

Demostración.

$f(P_0),\ldots,f(P_j)\ lin.ind. \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dim(P_0 \vee \ldots \vee P_j) = j \Leftrightarrow \dim(f(P_0 \vee \ldots \vee P_j)) = j$
$\Leftrightarrow \dim(f(P_0) \vee \ldots \vee f(P_j)) = j \Leftrightarrow f(P_0),\ldots,f(P_j)\ lin.ind.$

Teorema. Proyectividades en coordenadas.
Sea $f : P(E) \to P(E')$ una proyectividad.
Sean $R = (P_0,...,P_n; A)$ y $R' = (Q_0,...,Q_n; B)$ referencias de $P(E)$ y $P(E')$ respectivamente.
Supongamos que en la referencia R' tenemos
$f(P_0) = (b_0^0 : ... : b_0^n)$, ..., $f(P_n) = (b_n^0 : ... : b_n^n)$ y se cumple $f(A) = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^0 : ... : \sum_{i=0}^{n} b_i^n \right)$

Sea $M = \begin{pmatrix} b_0^0 & ... & b_n^0 \\ ... & ... & ... \\ b_0^n & ... & b_n^n \end{pmatrix}$

Entonces f viene dado en las referencias R y R' por $\begin{pmatrix} x_0' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}_{Según R'} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}_{Según R}$

Corolario.
Sea $f : P(E) \to P(E')$ una proyectividad y sea $R = (P_0,...,P_n; A)$ una referencia.
Si tomamos como referencia de la imagen al conjunto $R' = (f(P_0),...,f(P_n); f(A))$,
Entonces la matriz M será la identidad, y se cumplirá

$$f(x_0 : ... : x_n) = (x_0 : ... : x_n)$$

Teorema. Teorema fundamental de la Geometría proyectiva.

Lema.
La única proyectividad $\sigma : P(V) \to P(V)$ con que deja fijos los n+2 puntos de un símplex es la identidad.

Demostración.
Sea P(V) un espacio proyectivo de dimensión $n \geq 1$ sobre un cuerpo K.
Tómese en él $n+1$ puntos independientes $P_0 = \langle u_0 \rangle, P_1 = \langle u_1 \rangle, \ldots, P_n = \langle u_n \rangle$ y otro punto más $P = \langle u \rangle$ con la propiedad de no pertenecer a ninguno de los hiperplanos engendrados por n de entre los primeros $n+1$ puntos.

En cualquier caso, los vectores $u_0,\ldots,u_n$ determinan una base de V en la cual se expresa mediante $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ con todos los escalares λ_i distintos de cero. Póngase ahora

$P_i = \langle v_i \rangle$, con cada $v_i = \lambda_i u_i$ y considérese el sistema de coordenadas homogéneas $\{v_0, \ldots, v_n\}$ en el cual el punto P tiene a $(1,1,\ldots,1)$ por coordenadas.

Supongamos que $\sigma = [f]$. Entonces $f(u) = \lambda u$ y $f(v_i) = \alpha_i v_i$ para ciertos escalares no nulos $\lambda, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$.
Ahora bien, de $f(u) = f(v_0) + \ldots + f(v_n) = \alpha_0 v_0 + \ldots + \alpha_n v_n$ se obtiene que $\lambda = \alpha_i \ \forall i$, lo que implica que $f(v) = \lambda v$ para todo vector v, o sea, f actúa como la homotecia de razón λ y , por tanto, σ es la identidad.

Corolario. Teorema fundamental de la Geometría proyectiva.
Sean σ y ρ proyectividades de P a P' que aplican el símplex $\{P_i\}$ en el símplex $\{Q_i\}$.
Entonces $\sigma^{-1} \circ \rho$ es una proyectividad que deja fijos a todos los puntos de $\{P_i\}$, luego $\sigma^{-1} \circ \rho$ es la identidad, y por tanto $\sigma = \rho$.

El teorema fundamental adquiere una provechosa importancia por el hecho de que basta con dar la imagen de un símplex para determinar por completo una proyectividad.

Puntos fijos y variedades fijas o invariantes.
Sea $f : P(E) \to P(E)$ una homografía, $f = [\varphi]$, $\varphi : E \to E$ isomorfismo.
Diremos que $X \in P(E)$ es un punto fijo si $f(X) = X$.
Diremos que $V \subset P(E)$ es una variedad fija (o invariante) si $f(V) \subset V$ (de hecho $f(V) = V$ pues f es biyectiva).

Observación: No hay que confundir variedad fija con variedad de puntos fijos.

Proposición. Caracterización de los puntos fijos.
Un punto $P = [v]$ es un punto fijo $\Leftrightarrow$ v es un VEP de φ.

Demostración.
$f(P) = P \Leftrightarrow [\varphi(v)] = [v] \Leftrightarrow \exists \lambda \in K - \{0\} \mid \varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow v$ es un VEP de φ.

Proposición. Aplicaciones proyección y sección.
Sea un espacio proyectivo $P^n = P(E)$.
Sea $r = [F]$ una recta.
Sea $L = [G]$ una variedad lineal suplementaria a r, esto es: $G \oplus F = E$, $\dim G = n - 2$.

Definimos la aplicación proyección como la aplicación p:

$$p : r \to L^*$$
$$q \mapsto q \vee L$$

y la aplicación sección como su inversa:

$$s : L^* \to r$$
$$H \mapsto H \cap r$$

Las aplicaciones proyección y sección son proyectividades.

Demostración.
Para la proyección (para la sección, al ser su inversa, es inmediata).
Sea $\{e_1, e_2\}$ una base de F. La completamos hasta obtener una base de E
$\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n+1}\}$ para la cual $\{e_1, e_2, e \ , \ldots, e_{n+1}\}$ será una base de G.
$L^* = [G^\perp] \subseteq P(E)^\vee$, con $G^\perp = \langle e_1^*, e_2^* \rangle \subset E^*$.
Necesitamos establecer un isomorfismo entre F y $G^\perp$ que induzca la proyectividad entre $r = [F]$ y $L^* = [G^\perp]$

Sea la aplicación
$\varphi : F \to G^\perp$
$a e_1 + b e_1 \to b e_1^* - a e_2^*$

Es un isomorfismo con matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Veamos que la proyectividad que induce es efectivamente p:
$[F] = r \to L^* = [G^\perp]$
$q = [a e_1 + b e_2] \to [Ker(b e_1^* - a e_2^*)] = [\langle e_3, \ldots, e_{n+1}, a e_1 + b e_2 \rangle] =$
$= [\langle e_3, \ldots, e_{n+1} \rangle \oplus \langle a e_1 + b e_2 \rangle] = L \vee \{q\}$

como queríamos ver.

Definición. Perspectiva.
Sean r y r' dos rectas de $P^n = P(E)$.
Sea L una variedad suplementaria de r.
La aplicación

$$\begin{aligned} & r \to r' \\ & q \mapsto q' = (q \vee L) \cap r' \end{aligned}$$

es la composición de dos proyectividades (proyección y sección), luego es una proyectividad, que recibe el nombre común de perspectiva.

Proposición. Las afinidades vistas como proyectividades.
Las afinidades se extienen de forma única a proyectividades que dejan fijo el hiperplano del infinito.

Demostración.
Sea f la afinidad $f : A(V) \to A(V)$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sea $\bar{f}: P(V) \to P(V)$ la proyectividad

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Está claro que $\bar{f}(\pi_\infty) \subset \pi_\infty$ (de hecho es una igualdad), pues $x_n = 0 \Rightarrow x'_n = 0$.
Por lo tanto

Proposición. Extensión de una afinidad a una proyectividad.
Las afinidades se extienen de forma única a proyectividades que dejan fijo el hiperplano del infinito.

Demostración.
Sea f la afinidad $f: A(V) \to A(V)$, $f: x' = Mx + B$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sea $\bar{f}: P(V) \to P(V)$ la proyectividad

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Está claro que $\bar{f}(\pi_\infty) \subset \pi_\infty$ (de hecho es una igualdad), pues $x_n = 0 \Rightarrow x'_n = 0$.
Por lo tanto $\bar{f}(A^n) \subseteq A^n$, pues IP^n es la unión disjunta de A^n y π_∞.

Veamos que $\bar{f}|_{A^n}: A^n \to A^n$ coincide con f:

Puesto que $x_n \neq 0$, podemos hacer el cambio $y_i = \dfrac{x_i}{x_n}$ y queda

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 / x_n \\ x_1 / x_n \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x'_0 = a_1^1 \dfrac{x_0}{x_n} + \ldots + a_n^1 \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + b_1 \\ \ldots \\ x'_{n-1} = a_1^n \dfrac{x_0}{x_n} + \ldots + a_n^n \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + b_n \\ x'_n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n x'_0 = a_1^1 x_0 + \ldots + a_n^1 x_{n-1} + b_1 x_n \\ \ldots \\ x'_{n-1} = a_1^n \dfrac{x_0}{x_n} + \ldots + a_n^n \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + b_n \\ x'_n = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

(???? acabar)

Corolario 1.
Si $f : x' = Mx + B$ es una afinidad y $\bar{f}$ es la proyectividad asociada, $\bar{f}\,|_{\pi_\infty}$ tiene por ecuaciones $y' = My$, donde $y = (y_1, \ldots, y_n)$ si $\bar{f}\,|_{\pi_\infty}$ se aplica al punto $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n, 0)$.
Para ver esto basta con observar que si

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

son las ecuaciones de $\bar{f}$, entonces para todo punto de π_∞ se tiene

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es equivalente a

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Corolario 2. Caracterización de las dilataciones.
Las dilataciones (la identidad, las traslaciones y las homotecias) son las únicas homografías que dejan fijo todo punto de π_∞.

Demostración.
Veamos en primer lugar que las dilataciones dejan fijo todo punto de π_∞:
Ya hemos visto que el comportamiento de una afinidad en los puntos del infinito es de la forma

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde M es la matriz de la aplicación lineal asociada a la afinidad.
Luego para una dilatación se tiene que $M = \lambda I, \lambda \neq 0$, y por tanto todo punto del infinito queda fijo pues $[M] = [\lambda I] = [I] = Id$.

Son las únicas:
Supongamos que $\bar{f}$ deja fijo todo el plano del infinito.
Se tiene pues

$$\lambda_P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \forall p = (x_1, \ldots, x_n, 0) \in \pi_\infty$$

Aplicando esto a la base canónica $((1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1))$ se tiene que M es diagonal:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y aplicando esto al punto $(1,1,...,1)$ se tiene que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$$

Luego $M = \lambda I$ y por tanto ha de ser una dilatación.

8.6 Razón doble. Cuaternas armónicas.

Definición. Razón doble.

En un espacio proyectivo P(V), deducido del espacio vectorial V sobre un cuerpo K, a cada cuaterna de puntos alineados P, Q, R, S tal que $P \neq S$ y $Q \neq R$, se le asocia un escalar, que recibe el nombre de razón doble de dicha cuaterna y se denotará mediante (PQRS) de la siguiente manera:
En la recta en la que están situados los cuatro puntos dados, se adopta una referencia proyectiva $\{A_o, A_1; A_2\}$, respecto de la cual los susodichos puntos admitirán por coordenadas proyectivas a $P = (p_1 : p_2)$, $Q = (q_1 : q_2)$, $R = (r_1 : r_2)$, $S = (s_1 : s_2)$. Pues bien, se define la razón doble mediante:

$$(PQRS) = \frac{r_1 p_2 - p_1 r_2}{s_1 p_2 - p_1 s_2} : \frac{r_1 q_2 - q_1 r_2}{s_1 q_2 - q_1 s_2}$$

O equivalentemente:

$$(PQRS) = \frac{r_1 p_2 - p_1 r_2}{s_1 p_2 - p_1 s_2} : \frac{r_1 q_2 - q_1 r_2}{s_1 q_2 - q_1 s_2} = \frac{(r_1 p_2 - p_1 r_2)(s_1 q_2 - q_1 s_2)}{(s_1 p_2 - p_1 s_2)(r_1 q_2 - q_1 r_2)}$$

$$= \frac{(p_1 r_2 - r_1 p_2)(q_1 s_2 - s_1 q_2)}{(q_1 r_2 - r_1 q_2)(p_1 s_2 - s_1 p_2)} = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}}$$

(Si $Q = R$ o $P = S$ entonces definimos $(PQRS) = \infty$)

La razón doble está bien definida:

a) Si cambiamos un representante por cualquier otro, el cociente no cambia, pues el escalar que los diferencia aparece como factor en el numerador y el denominador.

b) La razón doble no depende del sistema de referencia:
Si tomamos otra referencia $\{B_o, B_1; B_2\}$, y para la cual $P_i = (x_i : y_i) = (x_i^{'} : y_i^{'})$, donde i=1,2,3,4.
Sabemos que existirá una matriz M con $\det M \neq 0$ tal que $\lambda_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_i^{'} \\ y_i^{'} \end{pmatrix}$ para ciertos $\lambda_i \neq 0$, i=1,2,3,4.

Luego $\begin{vmatrix} \lambda_i x_i & \lambda_i y_i \\ \lambda_j x_j & \lambda_j y_j \end{vmatrix} = \left| M \begin{pmatrix} x_i^{'} & y_i^{'} \\ x_j^{'} & y_j^{'} \end{pmatrix} \right|$ y por tanto $\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{\lambda_j} (\det M) \begin{vmatrix} x_i^{'} & y_i^{'} \\ x_j^{'} & y_j^{'} \end{vmatrix}$

Y los factores $\frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{\lambda_j} (\det M)$ aparecen tanto en el numerador como en el denominador y por tanto se cancelan.

Observación 1.
En el supuesto de que ninguno de los puntos sea el punto A_1, es decir, si p_2, q_2, r_2, s_2 son todos no nulos, puede escribirse de la siguiente manera:

$$(PQRS) = \frac{r_1 p_2 - p_1 r_2}{s_1 p_2 - p_1 s_2} : \frac{r_1 q_2 - q_1 r_2}{s_1 q_2 - q_1 s_2} = \frac{(r_1 p_2 - p_1 r_2)\frac{1}{p_2 r_2}}{(s_1 p_2 - p_1 s_2)\frac{1}{p_2 s_2}} : \frac{(r_1 q_2 - q_1 r_2)\frac{1}{q_2 r_2}}{(s_1 q_2 - q_1 s_2)\frac{1}{q_2 s_2}} =$$

$$= \frac{\frac{r_1}{r_2} - \frac{p_1}{p_2}}{\frac{s_1}{s_2} - \frac{p_1}{p_2}} : \frac{\frac{r_1}{r_2} - \frac{q_1}{q_2}}{\frac{s_1}{s_2} - \frac{q_1}{q_2}}$$

Razón doble y proyectividades.
Sea f una proyectividad de la recta proyectiva. Se cumple
$(PQRS) = (f(P) f(Q) f(R) f(S))$

Es decir, la razón doble es un invariante proyectivo.

Demostración.
Tomamos una referencia $(P_1, P_2; A)$ para el dominio y para la imagen tomamos la referencia $(f(P_1), f(P_2); f(A))$.
Aplicando el corolario (????), para estos dos sistemas referenciales la matriz M asociada a la proyectividad será la identidad, luego $f(x_i : y_i) = (x_i : y_i)$ y por lo tanto la razón doble, que se calcula mediante las coordenadas de los puntos, será la misma.

Razón doble en coordenadas absolutas.
Sea P^1 con una referencia fijada. Definimos la coordenada absoluta del punto $(x:y)$ como

$$\theta = \begin{cases} x/y & si\ y \neq 0 \\ \infty & si\ y = 0 \end{cases}$$

Luego tenemos una biyección entre P^1 y $K \cup \{\infty\}$.

Si ahora definimos $p = \frac{p_1}{p_2}$, $q = \frac{q_1}{q_2}$, $r = \frac{r_1}{r_2}$ y $s = \frac{s_1}{s_2}$, esto es, si se toman para los puntos de la cuaterna los sistemas de coordenadas proyectivas (1:p), (1:q), (1:r) y (1:s), toma la forma:

$$(PQRS) = \frac{r-p}{s-p} : \frac{r-q}{s-q} = \frac{r-p}{s-p} \cdot \frac{s-q}{r-q}$$

Alternativamente: $(PQRS) = \frac{r-p}{s-p} : \frac{r-q}{s-q} = \dfrac{\frac{r-p}{s-p} \cdot \frac{s-p}{r-q}}{\frac{r-q}{s-q} \cdot \frac{s-p}{r-q}} = \dfrac{\frac{r-p}{r-q}}{\frac{s-p}{s-q}} = \frac{r-p}{r-q} : \frac{s-p}{s-q}$

Si además los tres puntos P,Q y R son distintos, adoptando en la recta común la referencia {P,Q;R}, como en ella P=(1:0), Q=(0:1) y R=(1:1), si S=(a:b) resulta que

$$(PQRS) = \frac{r_1 p_2 - p_1 r_2}{s_1 p_2 - p_1 s_2} : \frac{r_1 q_2 - q_1 r_2}{s_1 q_2 - q_1 s_2} = \frac{1 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{a \cdot 0 - 1 \cdot b} : \frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot 1}{a \cdot 1 - 0 \cdot b} = \frac{-1}{-b} : \frac{1}{a} = \frac{a}{b}$$

es decir, (PQRS) es la coordenada absoluta del cuarto punto en la referencia formada por los tres primeros.

Corolario.
Si P,Q y R son tres puntos diferentes, $(PQRA) = (PQRB) \Leftrightarrow A = B$

y se cumple $(P\,Q\,R\,A) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow A = Q \\ 1 \Leftrightarrow A = R \\ \infty \Leftrightarrow A = P \end{cases}$

Ejercicio.
Demostrar que si A, B, C, D y E son cinco puntos distintos sobre una recta r, entonces

$$(ABCD) \cdot (ABDE) \cdot (ABEC) = 1$$

Elijamos un referencial para el cual $A = (a_1 : a_2)$, $B = (b_1 : b_2)$, $C = (c_1 : c_2)$, $D = (d_1 : d_2)$ y $E = (e_1 : e_2)$, y sean $a = \frac{a_1}{a_2}$, $b = \frac{b_1}{b_2}$, $c = \frac{c_1}{c_2}$, $d = \frac{d_1}{d_2}$ y $e = \frac{e_1}{e_2}$.

Luego por la Observación 2 (????)

$$(ABCD)(ABDE)(ABEC)=\frac{c-a}{d-a}\cdot\frac{d-b}{c-b}\cdot\frac{d-a}{e-a}\cdot\frac{e-b}{d-b}\cdot\frac{e-a}{c-a}\cdot\frac{c-b}{e-b}=1$$

Variación de la razón doble bajo permutaciones.
Sean P_1, P_2, P_3, P_4 puntos de P^1 no tres de ellos coincidentes.
Sea $\lambda=(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$.
Escribimos (con una notación típica de ciclos) la permuación de S_4 que envía
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ i & j & k & l\end{pmatrix}$ como $(i\quad j\quad k\quad l)$, ejemplo: $I=(1\quad 2\quad 3\quad 4)$.

Tenemos las siguientes variaciones:

$$\{(1\ 2\ 3\ 4),(2\ 1\ 4\ 3),(3\ 4\ 1\ 2),(4\ 3\ 2\ 1)\}\to\lambda$$

$$\{(1\ 3\ 2\ 4),(3\ 1\ 4\ 2),(2\ 4\ 1\ 3),(4\ 2\ 3\ 1)\}\to 1-\lambda$$

$$\{(2\ 1\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(3\ 4\ 2\ 1),(4\ 3\ 2\ 1)\}\to\frac{1}{\lambda}$$

$$\{(3\ 1\ 2\ 4),(1\ 3\ 4\ 2),(2\ 4\ 3\ 1),(4\ 2\ 1\ 3)\}\to\frac{1}{1-\lambda}$$

$$\{(2\ 3\ 1\ 4),(3\ 2\ 4\ 1),(1\ 4\ 2\ 3),(4\ 1\ 3\ 2)\}\to\frac{\lambda-1}{\lambda}$$

$$\{(3\ 2\ 1\ 4),(2\ 3\ 4\ 1),(1\ 4\ 3\ 2),(4\ 1\ 2\ 3)\}\to\frac{\lambda}{\lambda-1}$$

Conclusiones:
a) Hay almenos cuatro permutaciones que dejan fija la razón doble.
b) Por la acción de S_4, los valores $(P_{\sigma(1)}\quad P_{\sigma(2)}\quad P_{\sigma(3)}\quad P_{\sigma(4)})$ son

$$\left\{\lambda,\frac{1}{\lambda},1-\lambda,\frac{1}{1-\lambda},\frac{\lambda-1}{\lambda},\frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$$

y si, por ejemplo, $\lambda=-1$, entonces las permutaciones de forma $\lambda\to\frac{1}{\lambda}$ también dejan fija la razón doble.

Proposición. Razón simple expresada como razón doble.
Sean tres puntos alineados $A,B,C\in A_n(K)\subset P_n(K)$.
Entonces

$$(A,B,C)=(A,B,C,L_\infty)$$

donde L_∞ es la intersección de la recta AB con el hiperplano del infinito.

Demostración.

$A=(a_1,\ldots,a_n)$, $B=(b_1,\ldots,b_n)$, $C=(c_1,\ldots,c_n)$.

$\lambda=(A,B,C)\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow c_i-a_i=\lambda\left(c_i-b_i\right)\forall i$

$\Leftrightarrow c_i-a_i=\lambda\,c_i-\lambda\,b_i\quad\forall i$

$\Leftrightarrow -a_i+\lambda\,b_i=\lambda\,c_i-c_i\quad\forall i$

$\Leftrightarrow -a_i+\lambda\,b_i=(\lambda-1)\,c_i\quad\forall i$

$\Leftrightarrow \dfrac{\lambda\,b_i-a_i}{\lambda-1}=c_i\quad\forall i\quad(*)$

Suponiendo $\lambda\neq 1$, es decir, $A\neq B$.

Con la inmersión canónica $(x_1,...,x_n)\mapsto(x_1,...,x_n,1)$ tenemos

$A=(a_1,\ldots,a_n,1)$, $B=(b_1,\ldots,b_n,1)$, $C=(c_1,\ldots,c_n,1)$

Tomamos la referencia $(A,B;U)$ de la recta AB dentro del espacio proyectivo, donde $U=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n,2)$.

En esta referencia $A=(1,0)$, $B=(0,1)$.

Por la igualdad (*) deducimos que $C=(1,-\lambda)$. Efectivamente:

$C=(c_1,\ldots,c_n,1)=\alpha(a_1,\ldots,a_n,1)+\beta(b_1,\ldots,b_n,1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c_i=\alpha\,a_i+\beta\,b_i\quad\forall i\\ 1=\alpha+\beta\end{cases}$

Y basta tomar $\alpha=\dfrac{-1}{\lambda-1}$ y $\beta=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$, y por tanto $C=\left(\dfrac{-1}{\lambda-1},\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)=\left(-1,\lambda\right)=\left(1,-\lambda\right)$

Además, las coordenadas de L_∞ serán $L_\infty=(1,-1)$, por lo tanto:

$$(A,B,C,L_\infty)=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\0&-\lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}}=\frac{(-\lambda)(-1)}{(-1)(-1)}=\lambda$$

Proposición. Razón doble expresada como división de razones simples.

Si A,B,C,D son cuatro puntos distintos de L, entonces

$$\left(A,B;C,D\right)=\frac{\left(CBA\right)}{\left(DBA\right)}=\frac{\left(BCD\right)}{\left(ACD\right)}$$

Demostración.

Añadimos un punto $D=\left(d_1,\ldots,d_n\right)$, y sea $\mu=\left(D\,B\,A\right)$.

$\mu=\left(D\,B\,A\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}=\mu\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow a_i-d_i=\mu\left(b_i-d_i\right)=\mu\,b_i-\mu\,d_i$

$\Leftrightarrow a_i-\mu\,b_i=d_i-\mu\,d_i=d_i\left(1-\mu\right)$

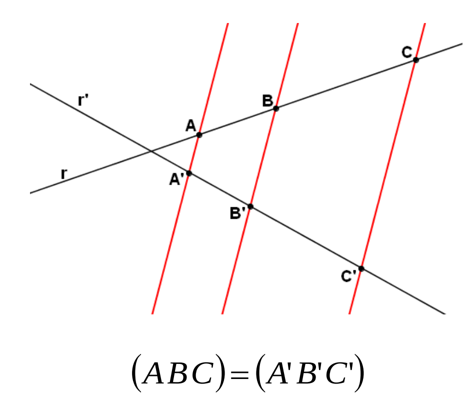
$\Leftrightarrow d_i=\dfrac{a_i-\mu\,b_i}{1-\mu}$

Luego en la referencia R anterior, $\varphi(D)=(1:-\mu)_R$, y sólo nos queda aplicar la fórmula de la razón doble:

$$\left(\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)\right)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -\mu\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -\mu\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}}=\frac{-\lambda}{-\mu}=\frac{(CBA)}{(DBA)}$$

Queda como ejercicio la última igualdad.

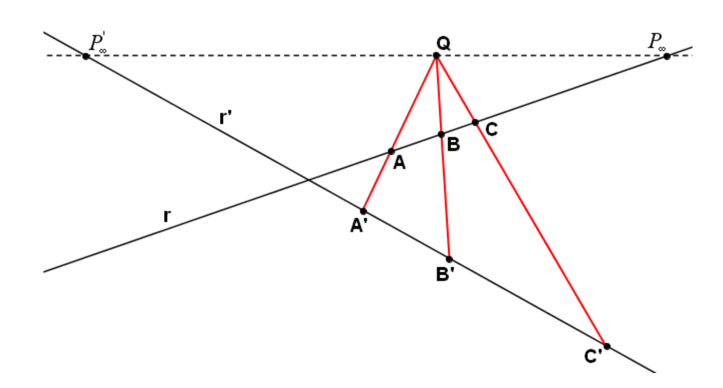
Corolario.
La razón simple es invariante por proyección paralela:



$$(ABC)=(A'B'C')$$

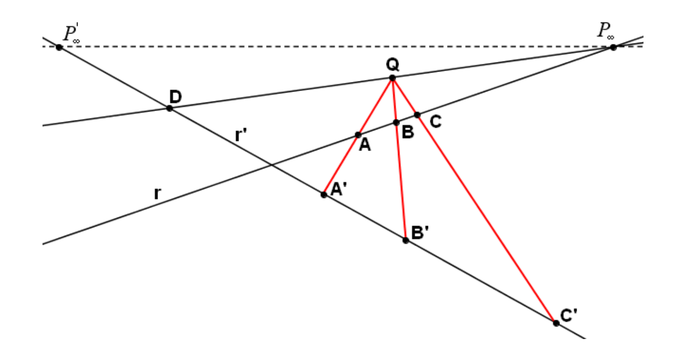
Demostración.
Si Q pertenece al hiperplano del infinito, y puesto que la razón doble se conserva por proyecciones, tenemos

$$(ABC)=(ABCP_\infty)=(A'B'C'P_\infty^{'})=(A'B'C')$$



Pero no se conserva si la proyección no es paralela:
En este caso Q no está en el hiperplano del infinito, luego P_∞ se proyecta en un punto $D\neq P_n^{'}$ (Si $D=P_n^{'}$ entonces $Q\in\overleftrightarrow{DP_\infty}=\overleftrightarrow{P_\infty^{'}P_\infty}$ que es el hiperplano del infinito, contradiciendo la hipótesis).

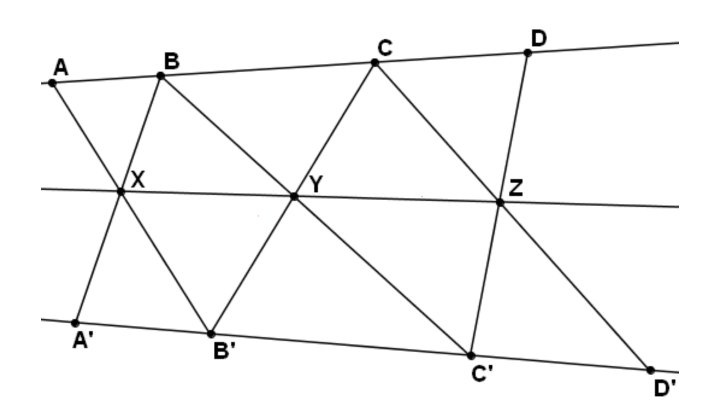
$$(ABC)=(ABCP_\infty)=(A'B'C'D)\neq(A'B'C'P_\infty^{'})=(A'B'C')$$



Ejemplo.
Si M es el punto medio del segmento AB y ∞ es el punto del infinito de la recta AB, entonces $(A B M \infty) = -1$.

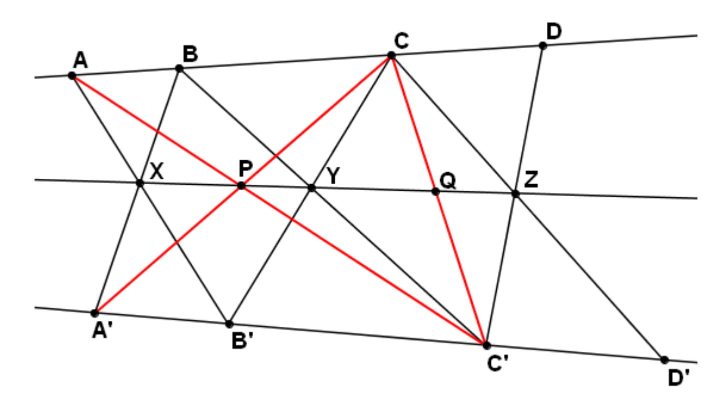
Demostración:
$(A B M \infty) = (M\ B\ A) = -1$ pues $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

Teorema. Teorema de la igualdad de razones dobles.
Sean A, B, C y D cuatro puntos sobre una recta y A',B', C' y D' otros cuatro puntos sobre otra recta. Sean $X = AB' \cap A'B$, $Y = BC' \cap B'C$, y $Z = CD' \cap C'D$.



Los puntos X, Y, Z están alineados $\Leftrightarrow (A B C D) = (A' B' C' D')$

Demostración.
Sea $P = AC' \cap A'C$. P pertenece a la recta XY por el Teorema de Pappus.
Sea $Q = CC' \cap XY$.



Claramente los puntos X, P, Y y Q están alineados. Sea r la recta que los contiene.
Sea $Z_1 = C'D \cap r$ y $Z_2 = CD' \cap r$.
Proyectivizando por C', tenemos $(ABCD) = (PYQZ_1)$
Proyectivizando por C, tenemos $(PYQZ_2) = (A'B'C'D')$

Luego si $Z_1 = Z_2$, entonces $\Leftrightarrow (ABCD) = (A'B'C'D')$, y si $(ABCD) = (A'B'C'D')$ entonces $(PYQZ_1) = (PYQZ_2)$ y por tanto $Z_1 = Z_2$.

8.7 Clasificación de proyectividades multidimensionales.

8.7.1 Proposición.

Sea $f : P(V) \to P(V)$ una proyectividad de un espacio proyectivo $P(V)$ de dimensión n. Supongamos que existe una referencia proyectiva R de $P(V)$ en la cual f viene representada por una matriz diagonal

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots (r+1) & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \lambda & & \\ & & & & \ddots (n-r) & \\ & & & & & \lambda \end{array}\right)$$

existen subespacios disjuntos $\Lambda, \Lambda' \subset P(V)$ de dimensiones r y $n-r-1$ tales que cada punto de ellos es invariante por f y, para cada $p \in P(V) - \{\Lambda, \Lambda'\}$, su imagen $f(p)$ está caracterizada por la condición

$$[p_0, p_1; p, f(p)] = \lambda$$

donde $p_0 =< p, \Lambda > \cap \Lambda'$ y $p_1 =< p, \Lambda' > \cap \Lambda$.

En particular, si $P(V)$ es una recta, existen puntos invariantes p_0, p_1 tales que $[p_0, p_1; p, f(p)] = \lambda$ para todo $p \neq p_0, p_1$.

Demostración.

Tomando coordenadas respecto de la referencia R del enunciado, la expresión de f será de la forma

$$f(x_0, \ldots, x_r, x_{r+1} \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_r, \lambda x_{r+1} \ldots, \lambda x_n)$$

Definimos $\Lambda : x_{r+1} = ... = x_n = 0$ y $\Lambda' : x_0 = ... = x_r = 0$.

Estos dos espacios tienen dimensiones r y $n-r-1$ respectivamente, y están formados por puntos invariantes.

Sea $p \in P(V) - \{\Lambda, \Lambda'\}$, $p = (a_0, ..., a_r, a_{n+1}, ..., a_n)$. Entonces

$$p_0 =< p, \Lambda > \cap \Lambda' = (0, \ldots 0, a_{r+1}, \ldots, a_n)$$

$$p_1 =< p, \Lambda' > \cap \Lambda = (a_0, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$$

Tomando $\{p_0, p_1, p\}$ como sistema de referencia de la recta $< p_0, p_1 >$, está claro que

$f(p) = (a_0, \ldots, a_r, \lambda a_{r+1} \ldots, \lambda a_n) = \lambda p_0 + p_1$

tiene coordenadas $(\lambda, 1)$, de lo que se sigue que $[p_0, p_1; p, f(p)] = \lambda$.

Variedades proyectivas.

Definición. Variedad proyectiva. Generadores de una variedad proyectiva.
En una geometría proyectiva G, una variedad proyectiva es un subconjunto de puntos $E \subset G$ tal que si $P \neq Q$ y $P, Q \in E$ entonces $\overleftrightarrow{PQ} \subset E$.

Obviamente, el conjunto vacío, los subconjuntos de un solo punto, las rectas y el propio espacio P son variedades proyectivas.
También es inmediato que la intersección de toda familia no vacía de variedades proyectivas es una variedad proyectiva, por lo que podemos definir la variedad proyectiva generada por un subconjunto $X \subset G$ como la intersección $\langle X \rangle$ de todas las variedades proyectivas en G que contienen a X. Si $X = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ escribiremos $\langle X \rangle = \langle P_1, P_2, ..., P_n \rangle$.
Está claro que $\langle \varnothing \rangle = \varnothing$, $\langle P \rangle = \{P\}$ y que si $P \neq Q$ entonces $\langle P, Q \rangle = \overleftrightarrow{PQ}$.

Teorema.
Sea E una variedad proyectiva no vacía y sea un punto $P \in G \setminus \mathrm{E}$. Entonces $\langle E, P \rangle$ es la unión de todas las rectas que pasan por E y el punto P.

Demostración.

Definición. Variedades proyectivas finitamente generadas. Dimensión.
Una variedad proyectiva E es finitamente generada si admite un conjunto generador finito. En tal caso, si el menor número de generadores de E es $n+1$, diremos que E tiene dimensión n. Representaremos por dim E a la dimensión de E.
Un conjunto de $n+1$ puntos es proyectivamente independiente si no está contenido en una variedad proyectiva de dimensión menor que n (y por tanto genera una variedad proyectiva de dimensión n).
Cada variedad proyectiva de dimensión n contiene $n+1$ puntos proyectivamente independientes, y por $n+1$ puntos proyectivamente independientes pasa una única variedad de dimensión n.
Llamaremos planos a las variedades proyectivas de dimensión 2.

Teorema.
En una geometría proyectiva, dos rectas distintas se cortan si y sólo si son coplanares.

Demostración.

Definición. Espacio proyectivo de dimensión n.
Diremos que un espacio proyectivo tiene dimensión finita n si como variedad proyectiva tiene dimensión finita n.

En particular definimos un espacio proyectivo tridimensional a un espacio proyectivo de dimensión 3.

Definición. Hiperplanos.
En lo sucesivo consideraremos únicamente espacios proyectivos de dimensión finita n.
A las variedades proyectivas de dimensión $n-1$ las llamaremos hiperplanos.

Teorema.
Si H es un hiperplano en un espacio proyectivo y E es una variedad proyectiva no vacía de dimensión d no contenida en él, entonces $E \cap H$ es una variedad proyectiva de dimensión $d-1$.

Demostración.

Espacios proyectivos cociente.

Definición. Espacio proyectivo cociente.
Sea P un espacio proyectivo de dimensión n y sea H_∞ un hiperplano cualquiera de P, al que llamaremos "hiperplano del infinito". Consideramos el conjunto $E = P \setminus \mathrm{H}_\infty$, y para toda variedad proyectiva V, se define la "variedad afín" asociada $V' = V \setminus H_\infty$.
En particular, para toda recta r de P se define la "recta afín" asociada r' como $r = r' \setminus H_\infty$.
Diremos que dos rectas de E son paralelas cuando sean coplanarias y disjuntas.

Teorema.
El espacio E definido anteriormente cumple las condiciones de espacio afín.

Demostración.

Dualidad.

Definición. Plano proyectivo dual.
Dado un plano proyectivo, su plano proyectivo dual es el plano resultante considerando los puntos como rectas y las rectas como puntos, e intercambiando las relaciones "pertenecer a" por "pasar por".

Espacios proyectivos tridimensionales.

Espacio afín en el contexto proyectivo.

Definición. Complementación proyectiva de un plano afín.
Sea E un plano afín axiomático (7.3.1). Puesto que el paralelismo es una relación de equivalencia (7.3.4), podemos definir el conjunto E_∞ de clases de equivalencia de rectas paralelas: $[r] = [s] \Leftrightarrow r // s$, que vamos a utilizar como "puntos en el infinito" que añadimos a E para crear la completación proyectiva del plano afín.
Así pues, sea $E' = E \cup E_\infty$. Los puntos de E se llamarán puntos propios y los puntos de E_∞ se llamarán puntos impropios.
Para cada recta r en E, definimos una recta r' en E' como $r' = r \cup [r]$, es decir, añadimos a cada recta afín su "punto en el infinito", o "punto impropio". Además, el propio conjunto E_∞ se añade también a la familia de rectas de E'.

Teorema.
El conjunto E' definido anteriormente cumple los axiomas de plano proyectivo (10.1.1).

Demostración:
Axioma PP1: Por cada dos puntos diferentes pasa una única recta.

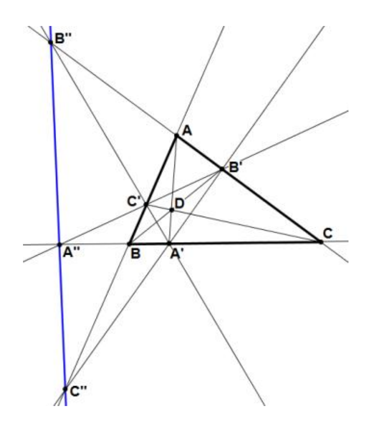
Si $P, Q \in E \setminus E_\infty$, por el axioma PA1 existe una única recta que pasa por P y Q.
Si $P \in E \setminus E_\infty$ y $Q = [r] \in E_\infty$, si $P \in r$ entonces $P, [r] \in r$, y si $P \notin r$, entonces por el axioma PA2, existirá una única recta s tal que $P \in s$ y $s // r$, luego $[s] = [r] \in s$ y por tanto $P, [r] \in s$.
Si $P, Q \in E_\infty$, por construcción de E_∞ como recta tenemos una recta que pasa por ambos. Ninguna otra recta puede pasar por ambos pues a cada recta se le ha añadido sólo un punto impropio.
Axioma PP2: Dos rectas cualesquiera tienen al menos un punto en común.
a) Si $r, s \neq E_\infty$ y $r // s$, entonces $[r] = [s] \in r \cap s$. Si por el contrario no son paralelas, por definición existirá un punto en su intersección.
Si $r \neq E_\infty$ y $s = E_\infty$, el punto $[r] \in r \cap E_\infty$. Por último, si $r = s = E_\infty$, son la misma recta.
Axioma PP3: Existen tres puntos no alineados.
Por el axioma PA3 existirán tres puntos A, B, C que no pertenecerán a ninguna recta propia, y por lo tanto a ninguna de sus extensiones. Tampoco pueden pertenecer a E_∞.
Axioma PP4: Toda recta tiene al menos tres puntos.
Por la proposición 7.3.2, cada recta r del plano contiene al menos dos puntos. Al añadirle el punto $[r] \in r$ estamos añadiendo un tercer punto diferente.

9 Excursiones matemáticas.

9.1 Recta polar trilineal. Polo trilinial.

9.1.1 Teorema. Polar trilineal asociado a un punto.

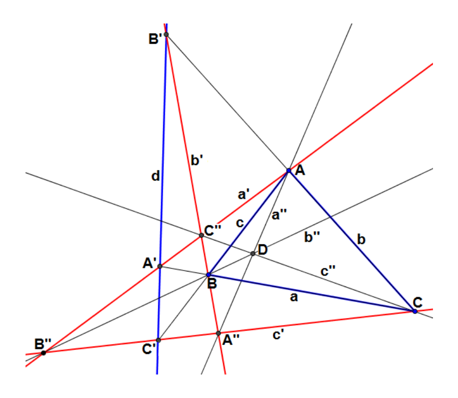
Dado un triángulo ABC, y un punto D fuera del mismo, definimos $A' = AD \cap BC$, $B' = BD \cap AC$ y $C' = CD \cap AB$.
Entonces los puntos $A'' = B'C' \cap BC$, $B'' = A'C' \cap AC$ y $C'' = A'B' \cap AB$ están alineados, y la la recta que determinan se denomina polar trilineal asociada al punto D.



Demostración.
Es una aplicación directa del teorema de Desargues aplicado a los triángulos ABC y A'B'C'.

9.1.2 Teorema. Polar trilineal asociado a una recta.

El dual del teorema anterior también será cierto:
Sea un trilátero abc, y $A = b \cap c$, $B = a \cap c$ y $C = a \cap b$.
Sea r una recta diferente de que no pase por ningún vértice.
Definimos $A' = a \cap d$, $B' = b \cap d$ y $C' = c \cap d$.
Definimos las rectas $a' = ad \vee bc = AA'$, $b' = bd \vee ac = BB'$ y $c' = cd \vee ab = CC'$.
Definimos $A'' = b' \cap c'$, $B'' = a' \cap c'$ y $C'' = a' \cap b'$.
Entonces, las rectas $a'' = AA''$, $b'' = BB''$, y $c'' = CC''$ pasan por un mismo punto D, llamado polar trilineal asociado a la recta.

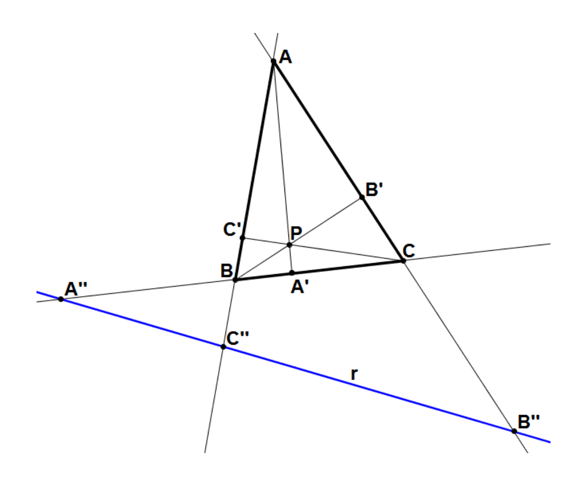


Demostración.
Es el teorema dual del anterior.

9.1.3 Teorema. Recta polar trilineal. Polo trilineal.

a) Sea un triángulo ABC y P un punto fuera del mismo. Sean $A' = BC \cap AP$, $B' = AC \cap BP$ y $C' = BC \cap CP$. Sean A'', B'' y C'' los conjungados armónicos de A', B' y C' sobre las rectas BC, AC y AB respectivamente. Los puntos A'', B'' y C'' están alineados. La recta que determinan se llama la **recta polar trilineal** del punto.

b) Sea un triángulo ABC y r una recta del plano cortando los lados AB, BC y AC en C'', A'' y B''. Sean A', B' y C' los conjungados armónicos de A'', B'' y C'' sobre las rectas BC, AC y AB. Entonces las cevianas BB', CC' y AA' se cortan en un punto P. Este punto se denomina **polo trilineal**, o polo armónico de la recta r.



Demostración.
Por ser puntos conjugados:

$$-1 = [B,C;A',A''] = \frac{BA' \cdot CA''}{BA'' \cdot CA'} \Rightarrow \frac{BA'}{BA''} = -\frac{CA'}{CA''} \Rightarrow \frac{BA'}{CA'} = -\frac{BA''}{CA''} \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} = -\frac{BA''}{A''C}$$

$$-1 = [A,C;B',B''] = \frac{AB' \cdot CB''}{AB'' \cdot CB'} \Rightarrow \frac{AB'}{AB''} = -\frac{CB'}{CB''} \Rightarrow \frac{AB'}{CB'} = -\frac{AB''}{CB''} \Rightarrow \frac{CB'}{B'A} = -\frac{CB''}{B''A}$$

$$-1 = [A,B;C',C''] = \frac{AC' \cdot BC''}{AC'' \cdot BC'} \Rightarrow \frac{AC'}{AC''} = -\frac{BC'}{BC''} \Rightarrow \frac{AC'}{BC'} = -\frac{AC''}{BC''} \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} = -\frac{AC''}{C''A}$$

Multiplicando las tres igualdades: $\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = -\frac{BA''}{A''C}\frac{CB''}{B''A}\frac{AC''}{C''A}$

Si se cumplen las hipótesis de (a), entonces la expresión de la izquierda es 1 por el teorema de Ceva, y por tanto $-1 = \frac{BA''}{A''C}\frac{CB''}{B''A}\frac{AC''}{C''A}$, es decir, se cumple el teorema de Menelao, es decir, los puntos están alineados.

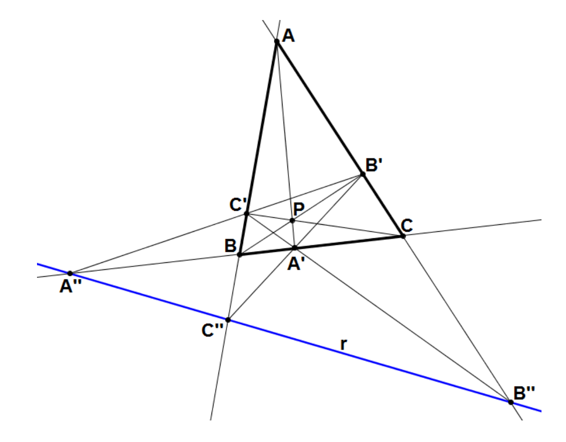
Y con el mismo razonamiento, si se cumplen las hipótesis de (b), entonces la expresión de la derecha es $-(-1) = 1$ por el teorema de Menelao, y por tanto $\frac{BA'}{A'C}\frac{CB'}{B'A}\frac{AC'}{C'B} = 1$, es decir, se cumplen las hipótesis del teorema de Ceva para el triángulo, es decir, las cevianas son concurrentes.

Una demostración alternativa de (a) mediante coordenadas proyectivas es la siguiente: Tomando como referencia proyectiva a $(A,B,C;P)$, entonces $A' = B + C$, $B' = C + A$, y $C' = A + B$, y sus conjugados armónicos respectivos son $A'' = B - C$, $B'' = C - A$, y

$C''=A-B$. Sumando estas expresiones llegamos a
$A''+B''+C''=B-C+C-A+A-B=0$, lo que demuestra que son colineales.

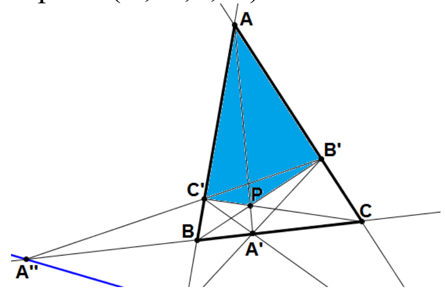
9.1.4 Proposición.

La recta polar trilineal de un punto P respecto de un triángulo ABC es el eje de perspectiva del triángulo ABC y el triángulo ceviano A’B’C’.



Esta proposición nos permite un método sencillo de construcción de la recta polar trilineal.

Demostración.
Sea ABC un triángulo, P un punto del plano y A’B’C’ el triángulo ceviano asociado: $A'=BC\cap AP$, $B'=AC\cap BP$ y $C'=BC\cap CP$.
Los dos triángulos están en perspectiva desde el punto P, por lo que, aplicando el teorema de Desargues, los puntos $AB\cap A'B'$, $BC\cap B'C'$ y $AC\cap A'C'$ están alineados.
Sea $A'''=BC\cap B'C'$. A''' es el conjugado armónico de A’ respecto de (B,C), basta considerar el cuadriátero completo (A,C’,P,B’):



y por unicidad del cuarto armónico, $A''=A'''=BC\cap B'C'$.
De la misma forma se demuestra que $C''=AB\cap A'B'$ y $B''=AC\cap A'C'$.

9.1.5 Teorema. El polo trilineal en coordenadas proyectivas.

Sea triángulo ABC, r una recta y P su polo trilineal asociado.
Si $r:ax+by+cz=0$ entonces $P=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$.

Recíprocamente, si las coordenadas de un punto P son $P=(a,b,c)$, la recta polar trilineal asociada a este punto tendrá como ecuación $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$.

Demostración.
Fijamos la referencia $(A,B,C;D)$, donde D es el baricentro del triángulo.
Entonces $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$ y $C=(0,0,1)$.
$BC: x=0$, $AC: y=0$ y $AB: z=0$.
Y por tanto podemos calcular sus coordenadas y las de sus conjugados respectivos (ver 2.3.10):

$$A'': \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow A''=(0,-c,b) \Rightarrow A'=(0,c,b)$$
$$B'': \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B''=(c,0,-a) \Rightarrow B'=(c,0,a)$$
$$C'': \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow C''=(b,-a,0) \Rightarrow C'=(b,a,0)$$

Luego $AA': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} \right) = (0,-b,c) \Leftrightarrow -by+cz=0$

$$BB': \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} \right) = (a,0,-c) \Leftrightarrow ax-cz=0$$

Y por último:

$$P=AA'\cap BB': \begin{cases} -by+cz=0 \Rightarrow z=\frac{b}{c}y \\ ax-cz=0 \Rightarrow ax-c\frac{b}{c}y=0 \Rightarrow ax-by=0 \Rightarrow x=\frac{b}{a}y \end{cases}$$
$$P=\left(\frac{b}{a},1,\frac{b}{c}\right)=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$$

Nota:
La recta polar trilineal y el polo trilineal son generalizaciones de la recta Gergonne y el punto Gergonne.

9.2 Media armónica.

9.2.1 Definición. Media armónica de un conjunto de números.

Dados dos números a y b, definimos su **media armónica** como el número h que satisface la relación

$$\frac{b-h}{b}=\frac{h-a}{a} \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

Y por lo tanto

$$h=\frac{2ab}{a+b}$$

En general, diremos que h es la media armónica de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si se cumple

$$\frac{n}{h}=\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}$$

9.2.2 Proposición.
La media armónica h de dos números a y b es el número h que satisface $H(a,b;0,h)$, es decir, es el cuarto armónico del origen y los números a y b.

Demostración.

$$H(a,b;\,0,h) \Leftrightarrow [a,b;0,h]=\frac{(0-a)(h-b)}{(h-a)(0-b)}=-1 \Leftrightarrow \frac{-a(h-b)}{-b(h-a)}=-1 \Leftrightarrow$$

$$ah-ab=-(bh-ab) \Leftrightarrow -2ab=-ah-bh \Leftrightarrow 2ab=(a+b)h \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b}=h$$

9.2.3 Proposición. La media armónica como invariante proyectivo.
La definición anterior muestra la invariancia proyectiva de la media armónica. Para obtener una definición invariante debemos añadir al conjunto de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ el origen a, puesto que la media armónica varía al variar dicho origen.

Diremos que h es la media armónica de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con origen a si se cumple

$$\frac{n}{h-a}=\frac{1}{x_1-a}+\ldots+\frac{1}{x_n-a}$$

Sea t cualquier número de la recta real diferente de $a, x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Multiplicando ambos lados de la expresión anterior por $t-a$ obtenemos

$$\frac{n(t-a)}{h-a}=\frac{t-a}{x_1-a}+\ldots+\frac{t-a}{x_n-a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{t-a}{x_i-a}$$

Restamos n a ambos lados:

$$\frac{n(t-a)}{h-a}-n=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t-a}{x_i-a}\right)-n \Leftrightarrow \frac{n(t-a)-n(h-a)}{h-a}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t-a}{x_i-a}-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{nt-na-nh+na}{h-a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{t-a-(x_i-a)}{x_i-a}\Leftrightarrow\frac{n(t-h)}{h-a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{t-x_i}{x_i-a}$$

$$\Leftrightarrow\frac{n(t-h)}{h-a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{t-x_i}{x_i-a}\Leftrightarrow n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t-x_i}{x_i-a}\cdot\frac{h-a}{t-h}\right)\Leftrightarrow n=\sum_{i=1}^{n}[x_i,h\,;t,a]$$

La expresión

$$n=\sum_{i=1}^{n}[x_i,h\,;t,a]$$

nos muestra que la media armónica h de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es invariante respecto de las trasformaciones proyectivas de la recta.

Una propiedad remarcable de la media armónica fue descubierta por Cotes, uno de los alumnos de Newton. Cotes fue designado por Newton parar la preparación de la segunda edición del *Philosophiae Principia Mathematica*.

9.3 La sucesión armónica.

9.3.1 Ejercicio 1.

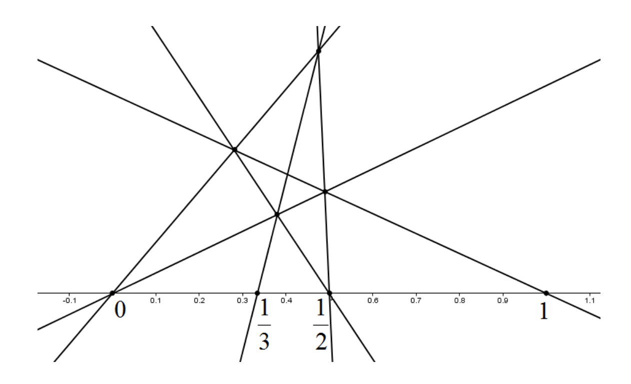
Determinar X en $H(0\,,1/2\,;\,X\,,1)$

Solución:

$$H(0\,,1/2\,;\,X\,,1) \Leftrightarrow [0\,,1/2\,;\,X\,,1] = -1 \Leftrightarrow \frac{(X-0)(1-1/2)}{(1-0)(X-1/2)} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1/2)X}{(X-1/2)} = -1 \Leftrightarrow X/2 = -(X-1/2) \Leftrightarrow X/2 = -X + 1/2 \Leftrightarrow X/2 + X = 1/2$$

$$\Leftrightarrow 3X/2 = 1/2 \Leftrightarrow X = 1/3$$



9.3.2 Exercicio 2.

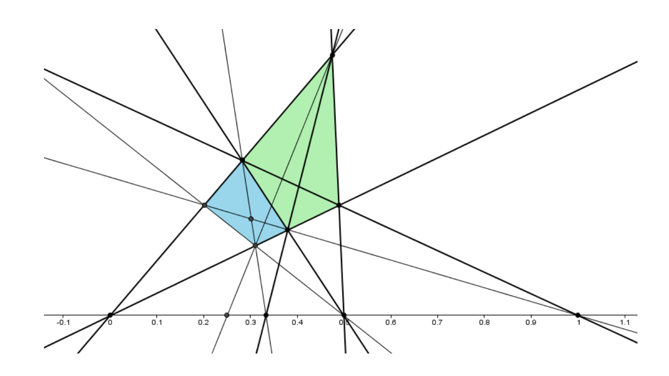
Determinar X en $H(0\,,1/3\,;\,X\,,1/2)$

Solución:

$$H(0\,,1/3\,;\,X\,,1/2) \Leftrightarrow [0\,,1/3\,;\,X\,,1/2] = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(X-0)(1/2-1/3)}{(1/2-0)(X-1/3)} = -1 \Leftrightarrow \frac{X(1/6)}{(1/2)(X-1/3)} = -1 \Leftrightarrow \frac{X}{6} = -(1/2)(X-1/3)$$

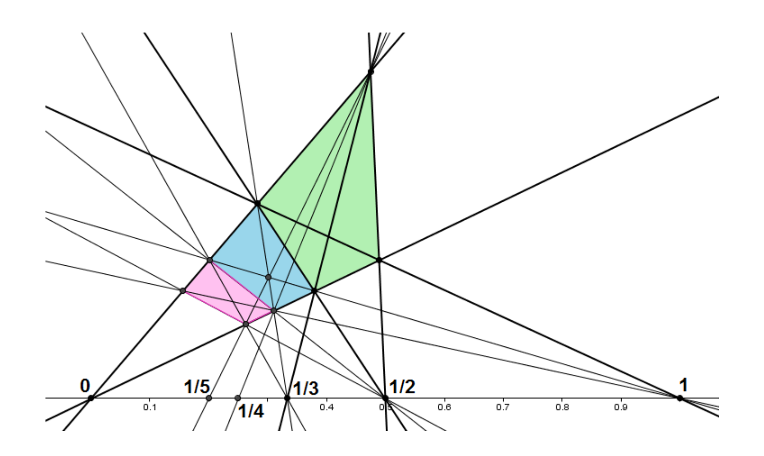
$$\Leftrightarrow X = -3(X-1/3) \Leftrightarrow X = -3X + 1 \Leftrightarrow X + 3X = 1 \Leftrightarrow X = \frac{1}{4}$$



9.3.4 Definición. Sucesión armónica.

El procedimiento de los ejercicios anteriores se puede prolongar indefinidamente, obteniendo la **sucesión armónica**:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$$



9.3.5 Ejercicio.

Demostrar que, para cualquier $n \geq 2$, se cumple $H\left(0\,,\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n+1}\,,\frac{1}{n-1}\right)$.

Solución:

$$H\left(0\,,\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n+1}\,,\frac{1}{n-1}\right) \Leftrightarrow \left[0\,,\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n+1}\,,\frac{1}{n-1}\right] = -1$$

$$\left[0\,,\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n+1}\,,\frac{1}{n-1}\right] = \frac{\left(\frac{1}{n+1}-0\right)\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n-1}-0\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{n-(n-1)}{(n-1)n}\right)}{\frac{1}{n-1}\left(\frac{n-(n+1)}{(n+1)n}\right)} =$$

$$= \frac{n-(n-1)}{n-(n+1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

9.4 Armonía musical.

9.4.1 Definición. Media aritmética, armónica y geométrica.

Dados dos números a y b, definimos tres medias:

La **media aritmética** m, que satisface la relación $b - m = m - a \Rightarrow m = \frac{a+b}{2}$.

La **media armónica** h, que satisface la relación $\frac{b-h}{b} = \frac{h-a}{a} \Rightarrow h = \frac{2ab}{a+b}$.

La **media geométrica** g, que satisface la relación $\frac{a}{g} = \frac{g}{b} \Rightarrow g = \sqrt{ab}$.

Proposición.
Se cumple

$$\frac{a}{h} = \frac{m}{b}$$

Demostración.

$$\frac{a}{h} = \frac{a}{\left(\frac{2ab}{a+b}\right)} = \frac{a(a+b)}{2ab} = \frac{a+b}{2b} = \frac{(a+b)/2}{b} = \frac{m}{b}$$

9.4.2 Cuarta y quinta en frecuencia.

Dada una frecuencia f, definimos los **armónicos de f** como la sucesión de frecuencias

$$(f, 2f, 3f, 4f, ...)$$

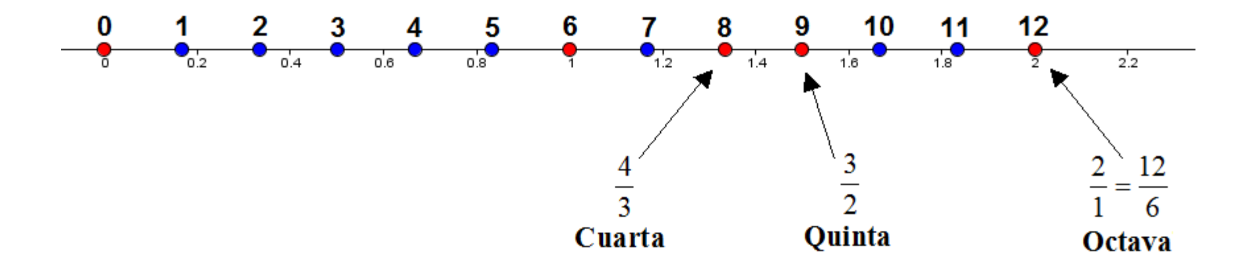
Definimos la **octava** de una frecuencia como $2f$, su primer armónico.

Entre una frecuencia $a = 1f$ y su octava $b = 2f$ establecemos las siguientes frecuencias intermedias:

Media aritmética: $m = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}$ (“**Quinta**”)

Media armónica: $h = \frac{2ab}{a+b} = \frac{4}{3}$ (“**Cuarta**”)

Pasando a común denominador 6, localizamos la quinta en el 9, la cuarta en el 8 y la octava en el 12:



La cuarta y la quinta cumplen la propiedad $\frac{a}{h}=\frac{m}{b}$. Efectivamente:

$$\frac{a}{h}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=\frac{8}{12}=\frac{m}{b}$$

9.4.3 Cuarta y quinta en longitud.

Puesto que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda, para generar las octavas necesitaremos cuerdas de longitudes

$$\left(l,\frac{l}{2},\frac{l}{3},\frac{l}{4},\ldots\right)$$

es decir, las longitudes forman una sucesión armónica.

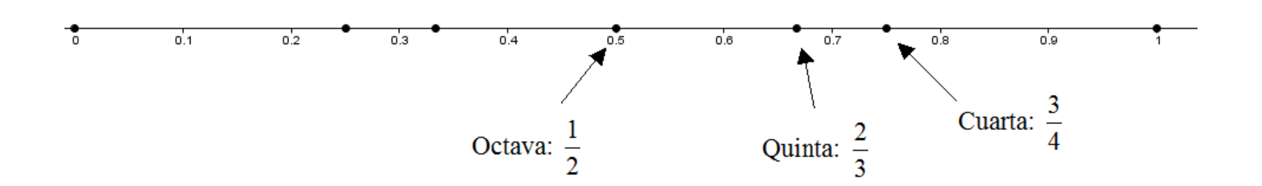
Entre un tono $a=1$ y su octava $b=\frac{1}{2}$ determinamos los siguientes intervalos:

Media aritmética: $m=\frac{a+b}{2}=\frac{3}{4}$ (“**Cuarta**”)

Media armónica: $h=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{3}$ (“**Quinta**”)

Pasando a común denominador $3\cdot 4=12$, nos quedan los intervalos

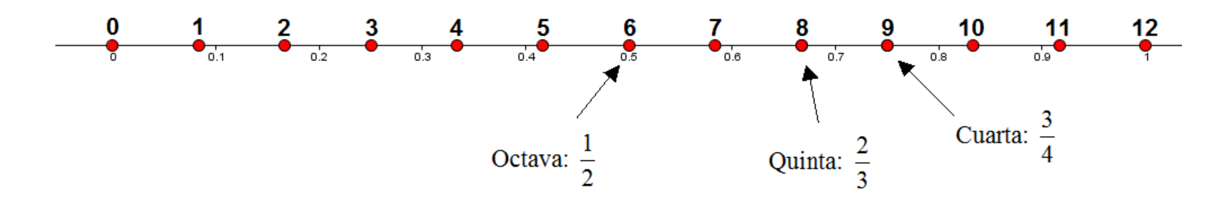
$$\text{Octava: } \frac{1}{2}=\frac{6}{12}\text{, Cuarta: } \frac{3}{4}=\frac{9}{12}\text{, Quinta: } \frac{2}{3}=\frac{8}{12}$$



Luego tiene sentido dividir la octava en 12 separaciones, para las cuales la octava será 6, la cuarta será 9 y la quinta será 8.

Media aritmética: $m = \frac{a+b}{2} = \frac{6+12}{2} = 9$

Media armónica: $h = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6+12} = 8$



9.4.4 Referencia histórica.

Los números en la Música.
La diferencia entre la aritmética, la geometría y la música consiste en encontrar la media. El modo de encontrar la media aritmética es la siguiente: suma los extremos, divide por 2 el resultado y obtendrás la mitad.... La media geométrica puedes hallarla de la siguiente manera: el resultado de multiplicar los extremos es el mismo que el que se obtiene de la multiplicación de los medios... La media musical es la siguiente: la media supera al primer extremo en la misma proporción que supera el segundo.... Según la música, buscarás los números de la forma siguiente. Supuestos dos extremos -por ejemplo 6 y 12- mira a ver en cuántas unidades del 6 es superado por el 12: te resultan 6. Halla ahora el cuadrado: 6 por 6, dan 36. Al mismo tiempo suma los dos extremos: 6 mas 12, son 18. A continuación divide 36 por 18 y obtendrás un cociente de 2. Suma ese cociente al extremo menor -6- y el resultado, 8, será la media entre 6 y 12. De la misma manera que 8 supera a 6 en 2 unidades, -esto es, la tercera parte de 6-, así también 8 es es superado por 12 en 4 unidades-que es igualmente su tercera parte-. Es decir, es superado en la misma proporción en que, a su vez, él supera al otro. De la misma manera que este principio de la armonía tiene en el mundo su origen -en la volubilidad de los círculos-, así también, en el microcosmos, posee tan gran influencia en lo que al sonido se refiere, que es imposible concebir que el hombre carezca de la perfección que entraña la armonía.

del Libro III de Las Etimologías de S. Isidoro de Sevilla

9.4.4 Otros intervalos.

Ahora podemos calcular la media armónica de $\frac{2}{3}$ y 1 : $\frac{2 \cdot 2/3 \cdot 1}{2/3+1} = \frac{4}{5}$

En total, entre un tono 1 y su octava $\frac{1}{2}$ hay 6 intervalos armónicos:

$$\left(\frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right)$$

La tabla completa de frecuencias es la siguiente:

Nombre	Frecuencia	Longitud	Marca	Nota
Tono (unison)	1/1 = 1	1	12	DO
minor second	16/15 = 1.066667	15/16		
major second	9/8 = 1.125	8/9		RE
minor third	6/5 = 1.2	5/6	10	
major third	5/4 = 1.25	4/5		MI
Cuarta (perfect fourth)	4/3 = 1.333333	3/4	9	FA
augmented fourth	7/5 = 1.4	5/7		
Quinta (perfect fifth)	3/2 = 1.5	2/3	8	SOL
minor sixth	8/5 = 1.6	5/8		
major sixth	5/3 = 1.666667	3/5		LA
minor seventh	7/4 = 1.75	4/7		
major seventh	15/8 = 1.875	8/15		SI
Octava (octave)	2/1 = 2	1/2	6	DO

9.4.5 Acordes.

Un acorde es un conjunto de tres o más sonidos diferentes que suenan simultáneamente. Para nosotros un acorde será un conjunto ordenado de tres sonidos.

Los **acordes armónicos** son aquellos cuyas frecuencias mantienen una proporción 1:2:3, 2:3:4, 3:4:5 y 4:5:6. Son agradables al oido.

a) Consideremos el acorde 4:5:6, cuya proporcionalidad es equivalente a $1:\frac{5}{4}:\frac{3}{2}$, es decir, DO-MI-SOL.

Las longitudes de las cuerdas son inversamente proporcionales a las frecuencias, por lo que dichas longitudes han de cumplir una proporción $1:\frac{4}{5}:\frac{2}{3}$.

Esta proporción es armónica en el sentido de conjunto armónico de números:

$1:\frac{4}{5}:\frac{2}{3} \to 1:\frac{4}{5}:\frac{4}{6} \to \frac{4}{4}:\frac{4}{5}:\frac{4}{6} \to H\left(0,\frac{4}{5};\frac{4}{6},\frac{4}{4}\right) = H\left(0,\frac{1}{n};\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-1}\right)$ para $n=5$ (ver ejercicio 3)

b) Consideremos el acorde 3:4:5 ("**subdominante**")

$3:4:5 \to 1:\frac{4}{3}:\frac{5}{3}$ que corresponde a unas longitudes de cuerda $1:\frac{3}{4}:\frac{3}{5}$

$1:\frac{3}{4}:\frac{3}{5} \to \frac{3}{3}:\frac{3}{4}:\frac{3}{5} \to H\left(0,\frac{3}{4};\frac{3}{5},\frac{3}{3}\right) = H\left(0,\frac{1}{n};\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-1}\right)$ para $n=4$

c) Otro acorde interesante es $\frac{3}{2}:\frac{15}{8}:\frac{9}{8}$ ("**dominante**")

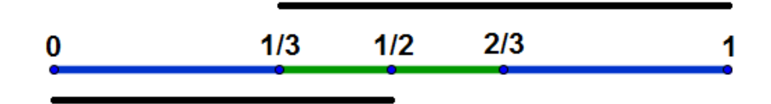
Estas frecuencias tienen asociadas unas longitudes de $\frac{2}{3}:\frac{8}{15}:\frac{8}{9}$

Nuevamente encontramos aquí un conjunto armónico de números:

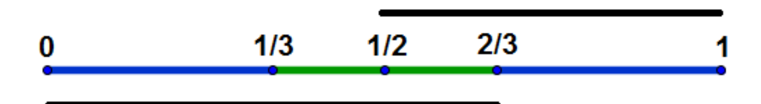
$$\left[0,\frac{2}{3};\frac{8}{15},\frac{8}{9}\right]=\frac{(8/15-0)(8/9-2/3)}{(8/9-0)(8/15-2/3)}=-1$$

En general, la fórmula del ejercicio 3 nos proporciona acordes armónicos para cualquier valor de n:

Para $n=2$, tenemos $H\left(0,\frac{1}{2};\frac{1}{3},1\right)$.
Suponiendo una cuerda tensa de longitud 1, encontramos la octava, que corresponde a una longitud $\frac{1}{2}$, y la quinta justa por encima de la octava, que corresponde a una longitud $\frac{1}{3}$.



Para $n=3$, tenemos $H\left(0,\frac{1}{3};\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$. Multiplicando por 2 las longitudes nos encontramos con el conjunto armónico $H\left(0,\frac{2}{3};\frac{1}{2},1\right)$, donde encontramos la octava (que corresponde a una longitud $\frac{1}{2}$) y una quinta justa por debajo de la octava.



Para $n=4$, tendríamos $H\left(0,\frac{1}{4};\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right)=H\left(0,\frac{3}{4};\frac{3}{5},1\right)$

Para $n=5$, tendríamos $H\left(0,\frac{1}{5};\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right)=H\left(0,\frac{4}{5};\frac{2}{3},1\right)$

9.4.6 Afinación Pitagórica y afinación uniforme.
La afinación Pitagórica tiene como objetivo aproximar estos valores mediante octavas y quintas perfectas:

Nombre	Frecuencia	Afinación pitagórica	Afinación uniforme
unison	1/1 = 1	1/1 = 1	$2^{0/12}$ = 1.000000
minor second	16/15 = 1.066667	$(2/3)^5(2)^3$ = 1.053498	$2^{1/12}$ = 1.059463
major second	9/8 = 1.125	$(3/2)^2(1/2)$ = 1.125	$2^{2/12}$ = 1.122462

minor third	6/5 = 1.2	$(2/3)^4(2)^3$ = 1.185185	$2^{3/12}$ = 1.189207
major third	5/4 = 1.25	$(3/2)^4(1/2)^2$ = 1.265625	$2^{4/12}$ = 1.259921
perfect fourth	4/3 = 1.333333	(2/3)(2) = 1.333333	$2^{5/12}$ = 1.334840
augmented fourth	7/5 = 1.4	$(3/2)^6(1/2)^3$ = 1.423828	$2^{6/12}$ = 1.414214
perfect fifth	3/2 = 1.5	3/2 = 1.5	$2^{7/12}$ = 1.498307
minor sixth	8/5 = 1.6	$(2/3)^4(2)^3$ = 1.580247	$2^{8/12}$ = 1.587401
major sixth	5/3 = 1.666667	$(3/2)^3(1/2)$ = 1.6875	$2^{9/12}$ = 1.681793
minor seventh	7/4 = 1.75	$(2/3)^2(2)^2$ = 1.777778	$2^{10/12}$ = 1.781797
major seventh	15/8 = 1.875	$(3/2)^5(1/2)^2$ = 1.8984375	$2^{11/12}$ = 1.887749
octave	2/1 = 2	2/1 = 2	$2^{12/12}$ = 2

10 Notas históricas.

10.1 Geometría analítica versus geometría sintética.

Autor: A. Castellón, Fuente: http://apncs.cie.uma.es/geop2005/1-1.pdf

Aunque la geometría sintética es mucho más antigua que la analítica, el adjetivo "sintética" aparece con bastante posterioridad al nacimiento de la geometría analítica. Aclarar esta aparente contradicción histórica en la denominación servirá también para presentar ambas disciplinas. Y es que la geometría más lejana en el tiempo, la desarrollada por los antiguos egipcios y en Mesopotamia y que luego estalló con el brillo de la ciencia en la Grecia clásica y en la que se mencionan nombres por todos conocidos como Euclides, Thales, Pitágoras, Pappus, Arquímedes, Apolonio, Menelao..., esa geometría sería hoy denominada como sintética, aunque entonces era la única geometría conocida y no necesitaba de apellido. Fue en el apéndice al Discurso del método donde Descartes procedió a una aritmetización de la geometría introduciendo coordenadas para determinar a los puntos y ecuaciones para describir a las rectas y planos.

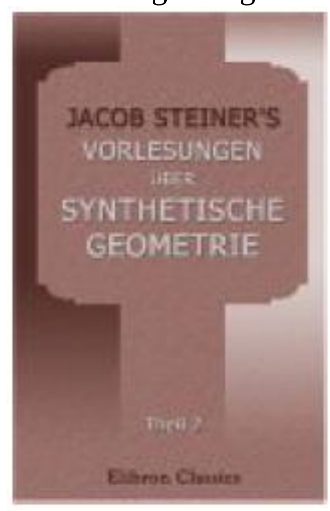
Este invento de las coordenadas ha sido crucial en la matemática pues, al margen de servir de ariete con el que introducirse en otras ciencias, ha permitido aplicar a la geometría las técnicas del álgebra y del análisis y de la topología. Y tal permeabilidad ha llegado hasta el punto, un tanto vehemente, de que los bourbakistas desterraron la palabra geometría de sus escritos al considerarla diluida entre las ramas más básicas de la matemática. En realidad, semejante maximalismo nunca ha llegado a cuajar del todo. Cuestión de modas.

El caso es que, a partir de Descartes y Fermat, los geómetras vieron el cielo abierto. Problemas que antes estaban predestinados a ser resueltos mediante construcciones que exigían un alto nivel de intuición e ideas felices, ahora se formulaban en términos numéricos y se sometían a reglas concretas de fácil sistematización. El recién descubierto cálculo infinitesimal resultó un aliado estimable, mientras que escollos históricos para los griegos, como la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo o la duplicación del cubo, se formulaban en un lenguaje algebraico que habría de resultar definitivo para zanjarlos de una vez y para siempre. Había nacido la *geometría analítica*. Y no es que los métodos arcaicos no fueran adecuados, léase, por ejemplo, la prueba original del principio de Arquímedes o las obras de Galileo[(1)], en donde no se

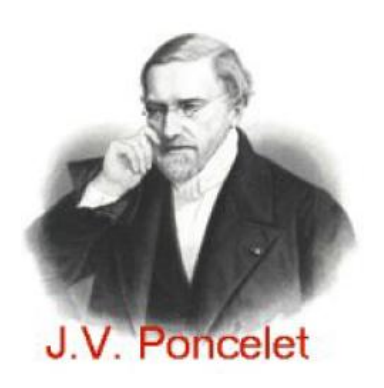
usaban para nada coordenadas, sino que estos nuevos procedimientos se mostraban mucho más asequibles y sencillos, al tiempo que gozaban de una mayor potencia.

De nuevo las modas: la geometría al estilo clásico, salvo episodios fugaces que no tuvieron demasiada repercusión, declinaba sin cesar. Pocos prestaron atención a los trabajos de Saccheri sobre el quinto postulado de Euclides o a la brillante concepción del espacio proyectivo de Desargues. Al principio del siglo XIX, casi todo lo "no analítico" quedaba como competencia de la llamada *geometría descriptiva*, introducida por Gaspard Monge en su tratado de 1799, y caracterizada por usar los procedimientos de proyección y sección de Desargues de los que se hablará más adelante. Fue un alumno de Monge, Jean Victor Poncelet, quien vino a revitalizar al moribundo. Oficial de los ejércitos de Napoleón, Poncelet cayó prisionero en la campaña de Rusia permaneciendo encarcelado entre 1813 y 1814. Allí, en la prisión de Saratov, el aburrimiento lo llevó a intentar recordar las enseñanzas de su maestro, fruto de lo cual escribió el *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*. Pero ahora, el camino señalado por Poncelet, que rescataba del olvido a la geometría proyectiva desarguesiana, fue seguido por importantes matemáticos de su tiempo. Alguna vez se oye afirmar que la geometría proyectiva moderna nació en el presidio de Saratov.
Sin embargo, entre los estudiosos de la "nueva" geometría se abrió una enorme zanja de intransigencia. Aquí fue cuando surgió la denominación *geometría sintética* como contrapartida, o incluso como término antitético, de la *geometría analítica*. El mundo quedó dividido entre sintéticos y analíticos. Los primeros renegaban de cualquier aritmetización de la geometría mientras que los otros seguían aplicando las técnicas cartesianas, ahora a la geometría proyectiva, mediante la introducción de las coordenadas baricéntricas de Möbius o las coordenadas homogéneas de Plücker. Cada bando poseía importantes argumentos que esgrimir en su favor y recriminaciones y censuras que lanzar al contrario. Poncelet se mantuvo al margen del enfrentamiento pues, si bien comprendía que los métodos sintéticos proporcionaban razonamientos elegantes y de una enorme belleza intrínseca, también admitía que las herramientas analíticas resultaban, a la postre, más efectivas, más sistemáticas y dependían menos de la inspiración del autor.

El más fogoso de los sintéticos, Jakob Steiner, consiguió describir, mediante proyectividades entre haces de rectas, a las cónicas, lo cual las "rescató", desde su punto de vista, del "secuestro" impuesto por los analíticos, quienes las veían como lugares geométricos descritos por ecuaciones de segundo grado en dos variables.



Otro triunfo de los sintéticos se produjo con el teorema de von Staud (también conocido impropiamente como teorema fundamental de la geometría proyectiva). Hasta entonces, las proyectividades de Chasles se definían en función de la razón doble de cuatro puntos alineados, la cual dependía de longitudes o coordenadas, es decir, de los odiados números. El trabajo de von Staud, aun dado lo controvertido de su demostración, liberó a la geometría de cualquier atadura numérica al caracterizar las proyectividades mediante una razón doble particular, la cuaterna armónica, expresable en términos exclusivamente geométricos. No obstante, los analíticos seguían considerándose superiores ya que ellos no precisaban, al contrario que los sintéticos, de la presencia de una cónica para enunciar el principio de dualidad, como así lo hizo observar Gergonne. Y el principio de dualidad era, sin lugar a dudas, el más importante descubrimiento de la geometría proyectiva. Cabe decir aquí que este principio, formulado por Poncelet para el plano proyectivo real, duplicó de golpe toda la geometría pues desde entonces los teoremas se demostraron a pares: cada teorema llevaba debajo del brazo a su dual. El propio Gergonne impuso la moda de escribir geometría a dos columnas: a la izquierda la teoría directa, a la derecha, la teoría dual.


J.V. Poncelet

El enfrentamiento entre analíticos y sintéticos se agrió hasta el punto de causar bajas. Steiner, el sintético más enardecido, advirtió al *Journal für Mathematik* que no les mandaría ningún trabajo si publicaban en la revista cualquier artículo de Plücker, quien ejercía como cabeza visible de los analíticos. Semejante virulencia acabó por desanimar al descubridor de las coordenadas homogéneas quien, con un "de ésta me borro", se pasó a la física, donde realizó importantes aportaciones. Estas batallas son incomprensibles en la actualidad, aunque todavía se adivine una justificación en el momento histórico en que se produjeron. A finales del XIX y comienzos del XX, la matemática entera comenzó a tambalearse al perder apoyo en sus cimientos. Una mayor exigencia del rigor desterraba la intuición en que se habían basado muchos de los más importantes teoremas. Aparecían por doquier paradojas con nombre propio. La misma geometría ofreció ejemplos de desobediencia al canon euclídeo con los trabajos de Gauss, Lobachevski, Klein o Rieman. Se vive la llamada crisis de los fundamentos. Y fue precisamente el ejemplo axiomático dado por la sistematización de la geometría, fuera euclídea o no, la que señaló la dirección por la que salir de aquella encrucijada. Eso sí, como resultado del parto, una vez cerrada la lista de axiomas de Hilbert o de otros matemáticos, la geometría que se venía denominando sintética volvió a languidecer poco a poco. De hecho, se la dio por muerta como propuesta de investigación al considerarla por completo cerrada. Si acaso, aún había quien se entretuvo en el teorema de von Staud reconstruyendo una demostración más sólida y sencilla que la original. Cítese aquí la teoría de las geometrías continuas de von Neumann o los trabajos de Ancochea sobre proyectividades en los cuaterniones.

Cabe decir también que en España, tradicionalmente apartada de las corrientes científicas del resto del mundo civilizado, no se notó este retroceso de la geometría sintética. Las materias de la licenciatura en exactas y los textos geométricos de aquellos años responden a títulos como *Geometría descriptiva*, *Geometría métrica*, *Curvas alabeadas*, *Geometría diferencial clásica* o *Trigonometría esférica*. Se seguía en el mismo tono que los libros históricos del XIX, con muy escasas incursiones en teoría de Galois, variedades diferenciables, topología general, relatividad o, incluso, los elementales espacios vectoriales de Grassmann. Entre las excepciones notables, menciónese a Luis Santaló, primer Premio "Príncipe de Asturias" de las Ciencias, quien doctorándose en Madrid en 1939, quizás escapó a la tónica imperante en la piel de toro al ejercer casi toda su carrera en distintas universidades argentinas.



Sólo la llegada a Iberia de lo que aquí se denominaba como "matemática moderna", ya bien entrada la segunda mitad del XX, puso a España poco a poco en la vanguardia de la investigación en que hoy se encuentra. Y volviendo al relato de los hechos, sepa el lector que por segunda vez en la historia llegó el bálsamo de la resurrección para la geometría sintética. En la década de los cuarenta, el matemático Marshall Hall recorrió el camino inverso al habitual, de lo sintético a lo analítico, plasmándolo en una de sus más famosas publicaciones (*Projective Planes*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 54, 1943, p. 229-277)[(2)]. A partir de un conjunto de axiomas que describen a un plano (proyectivo o afín), Hall construye una estructura algebraica que da soporte a las coordenadas. La imbricación entre lo sintético y lo analítico es tal que se establecen interesantes equivalencias entre la verificación de propiedades geométricas del plano y la satisfacción de identidades algebraicas en el conjunto de las coordenadas. Esta conexión sintético-analítica ha fascinado a muchos matemáticos abriendo multitud de vías sobre las que progresar. Uno de los más grandes, Emil Artin, recondujo el camino abierto por Hall en una bella cadena de argumentos al formularlo en términos de transformaciones geométricas[(3)].



Felix Christian Klein (1849 - 1925)

En la actualidad, los trabajos acerca de la geometría sintética rondan por estos derroteros persistiendo aún multitud de cuestiones abiertas que suscitan el interés de los investigadores. Cítese, por ejemplo, el problema de la existencia de los planos de orden diez[(4)], que se resistía a su resolución y que solo ha sido solventado con el auxilio de grandes computadoras y técnicas de corrección de errores en la transmisión digital, o el de proporcionar una demostración no algebraica de que todo plano papiano finito es desarguesiano. También se desconoce la lista de los órdenes de los planos no desarguesianos, o la relación completa de estos. Ya en el siglo XXI incluso se han trasladado algunas de estas circunstancias a estructuras algebraicas ternarias, ofreciendo también un campo virgen sobre el que avanzar. En tal dirección se encaminan los recientes trabajos de Wolfgang Bertram.

Hoy en día, tras los distintos matices impuestos por el paso de la historia, los adjetivos sintético y analítico aplicados a la geometría adquieren un significado particular. Hablar de geometría analítica supone considerar una estructura algebraica (en principio R o C u objetos más generales como un cuerpo o un anillo de división) que dé soporte a las coordenadas, y montar sobre aquella el modelo geométrico a estudiar. En tal proceso suelen jugar un importante papel las técnicas del álgebra lineal. En geometría sintética, por el contrario, se describe directamente el modelo geométrico a partir de un conjunto de axiomas, pudiendo después construirse desde este una estructura algebraica para las coordenadas, procedimiento conocido como introducción de coordenadas. En ambos casos, y siguiendo el espíritu de Felix Klein, se definen ciertos tipos de transformaciones geométricas en esos modelos. Cada rama de la geometría se ocupa entonces de investigar acerca de las propiedades que quedan invariantes por una clase particular de transformaciones: isomorfismos lineales para el álgebra lineal, proyectividades o colineaciones para la geometría proyectiva, afinidades para la geometría afín, isometrías para la geometría euclídea, o, con mayor amplitud de miras, homeomorfismos para la topología y difeomorfismos para la geometría diferencial.

(1) El lector interesado puede encontrar traducciones castellanas de estos textos en Neuman, J.R. Enciclopedia Sigma, El mundo de las matemáticas, Grijalbo, Barcelona, 1976, y en Hawking, S. A hombros de gigantes. Las grandes obras de la física y la astronomía, Crítica, Barcelona,
(2) Un desarrollo minucioso de los contenidos de este artículo, totalmente accesible por no imponer conocimientos previos y, además, escrito en castellano, puede consultarse en Blumenthal, L.M., Geometría axiomática, Aguilar, Madrid, 1965.
(3) Véase Artin, E., Algébre Géométrique, Gauthier-Villar, Paris, 1972.
(4) El orden de un plano es el número de puntos de una recta más uno.

Referencias literarias.

Otras veces toca preguntar al chico, para tormento del padre.
“Papá, ¿por qué no tienen barba las mujeres?” A punto estuvo Carrascal de responder: “Porque las tienen los hombres; para diferenciarse en la cara”, pero se calló.
-Mira, hijo, en un triángulo que tenga dos ángulos desiguales, a mayor ángulo se opone mayor lado...
-Sí, ya lo veo, papá.
-No basta que lo veas, hay que demostrártelo.
-¡Pero si lo veo...!
-No importa; ¿de qué sirve que veamos las cosas si no nos las demuestran?

Miguel de Unamuno, Amor y pedagogía 1901

Los hermanos Karamazov (capítulo 3)

Sin embargo, hay que advertir que si Dios existe, si verdaderamente ha creado la Tierra, la ha hecho, como es sabido, de acuerdo con la geometría de Euclides, puesto que ha dado a la mente humana la noción de lastres dimensiones, y nada más que tres, del espacio. Sin embargo, ha habido, y los hay todavía matemáticos y filósofos… que dudan si todo el Universo o, para decirlo de manera más amplia, toda existencia, fue creada solo de acuerdo con los principios de Euclides, e incluso se atreven a soñar que dos rectas paralelas que, de acuerdo con Euclides nunca se pueden cortar en la Tierra, quizás puedan hacerlo en el infinito. En vista de que ni siquiera esto soy capaz de comprender, he decidido no intentar comprender a Dios. Confieso humildemente mi incapacidad para resolver estas cuestiones. En esencia, mi mentalidad es la de Euclides: una mentalidad terrestre. ¿Para qué intentar resolver cosas que no son de este mundo? Te aconsejo que no te tortures el cerebro tratando de resolver estas cuestiones, y menos aún el problema de la existencia de Dios. ¿Existe o no existe? Estos puntos están fuera del alcance de la inteligencia humana, que sólo tiene la noción de las tres dimensiones.